

Fizikai Kémia 3 (fizkem3k17va)
Vázlat

Szalay Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Kémiai Intézet

2020. május 13.

Ajánlott irodalom

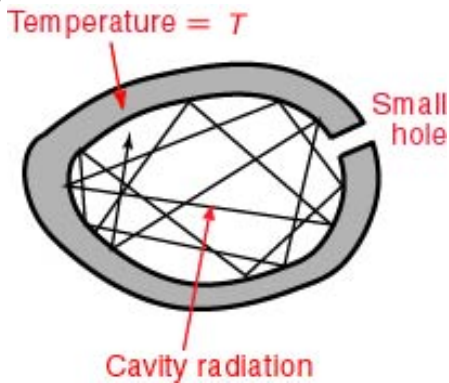
1. Az előadás vázlata: <https://pgszalay.elte.hu/oktatas> → Fizikai Kémia 3.
2. Török Ferenc és Pulay Péter: Elméleti Kémia (egyetemi jegyzet)
3. P. W. Atkins: Fizikai Kémia II. Szerkezet, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002
4. Kapuy Ede és Török Ferenc: Atomok és Molekulák Kvantumelmélete (Akadémiai Kiadó)

1. A kvantummechanika alapjai

1.1. A kvantummechanika kísérleti megalapozása

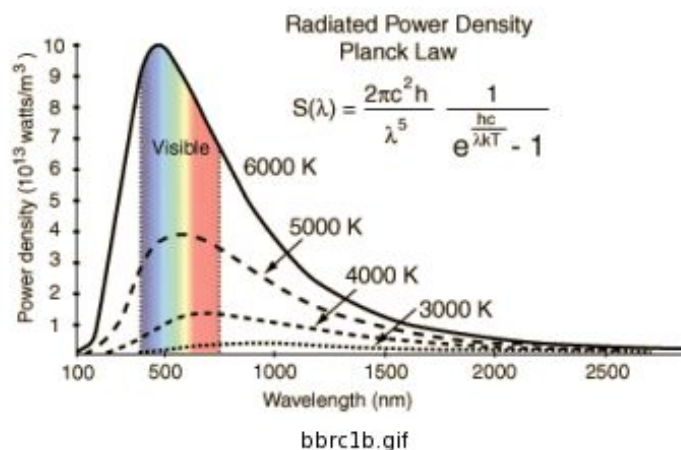
1.1.1. Fekete test sugárzás

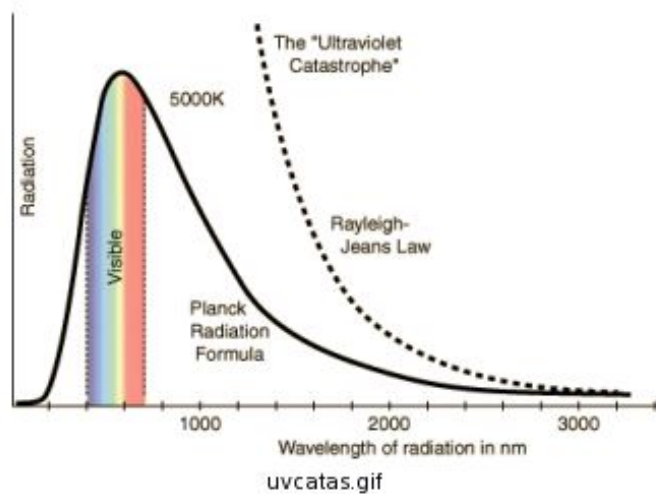
A fekete test egy olyan idealizált objektum, mely minden sugárzást, annak hullámhosszától függetlenül, elnyel, semmit sem szór vagy sugároz vissza. A fekete testet egy zárt, vastagfalú edénnyel modellezzük, amelynek a falát fűtjük. Belül a hőmérséklet hatására a testből elektromágneses sugárzás („fény”) lép ki, egy idő után a kilépő és elnyelt sugárzás egyensúlyba kerül. Persze erről nem tudunk semmit, hiszen a test zárt. Ezért kicsiny lyukat vágunk rá, és így a valamennyi sugárzás kijön és egy prizmával komponenseire bontjuk. Fontos, hogy a lyuk elegendően kicsi legyen, így az egyensúly belül ne bomoljon föl.



(Egy példa: a kozmikus háttér spektruma egy "blackbody" spektrum, ahol a hőmérséklet, $T_B = 2.725 \text{ K}$)

Ábrázoljuk a fény intenzitását a frekvencia függvényében (különböző hőmérsékleten)!





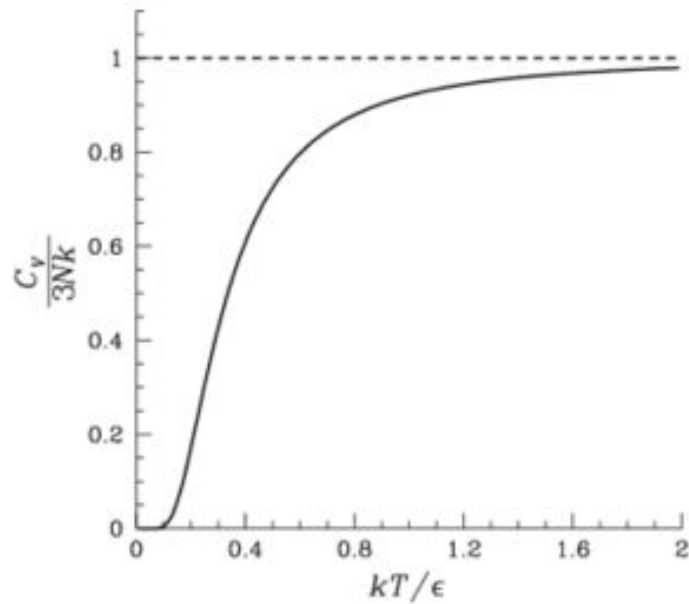
Magyarázat a klasszikus elmélet szerint: a sugárzást elemi oszcillátorok hozzák létre, ezek átlagos energiája ($\bar{\epsilon}$) az ekvipartíció tétele értelmében arányos a hőmérséklettel. (fenti első ábra). Az utóbbi ábrán látható szaggatott görbe adja meg az elmélet által jósolt hullámhossz/energiasűrűség összefüggést: a nagy frekvenciájú rezgésekhez tartozó energiasűrűség végtelenbe tart a hőmérséklettől függetlenül: „ultraibolya katasztrófa”. Tehát nincs összhangban a kísérlettel!

Planck 1900-ban új, merőben szokatlan magyarázattal állt elő: e szerint az egyes oszcillátorokra jutó energia nem lehet tetszőlegesen kicsi, különben végtelenül sokféleképpen lehetne az energiát az oszcillátorok között elosztani (entrópia). Tehát a tapasztalat csak akkor értelmezhető, ha az oszcillátorok energiája kvantált. Felteszi tehát, hogy az oszcillátorokra jutó energia $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$... lehet csak, és nem változik folytonosan. Ebből az következik, hogy bármely hőmérsékleten van maximális frekvencia, ami fölött az oszcillátorok energiája már nulla. Az ún. Planck-állandó: $h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$

Planck maga is bizonytalan volt az elméletben, nem tetszett neki, hogy feltevással kell élnie (posztulátum), feltétlenül le akarta vezetni a feltételezést. Így zseniális felfedezése ellenére is lemaradt a kvantummechanika kidolgozásáról....

1.1.2. Hőkapacitás

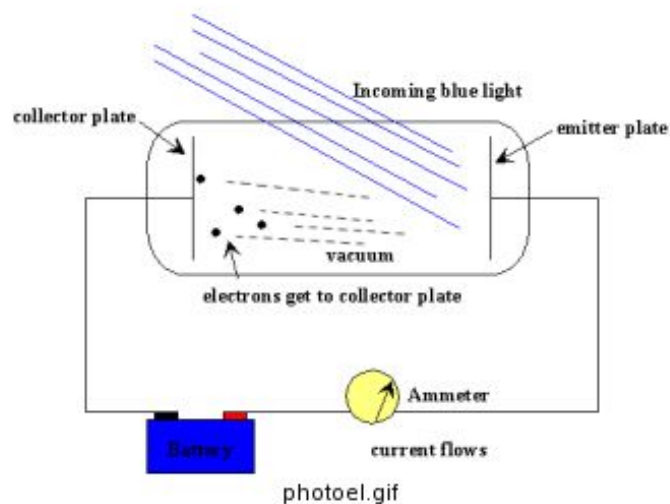
Dulong-Petit: $c_{v,m} \approx 3R$, tehát hőmérsékletfüggetlen, alacsony hőmérsékleten azonban:



Einstein: az anyag energiája kvantált.

Debye: többféle oszcillátor is van.

1.1.3. Fotoelektromos effektus



Probléma:

- van küszöbfrekvencia, ami alatt elektron nem lép ki
- a fény intenzitásának növekedésével a kilépő elektron energiája nem változik (küszöbfrekvencia alatt bármely nagy intenzitásnál sem lép ki)

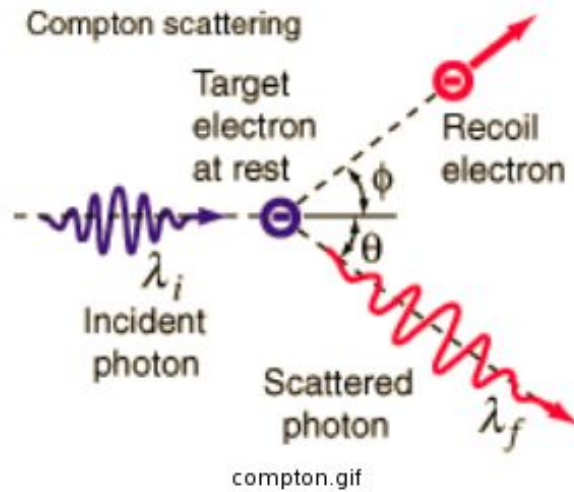
A mérések szerint a következő egyenlet áll fenn a kilépő elektron kinetikus energiája és a fény frekvenciája (ν) között:

$$T_{el} = h\nu - A$$

ahol A a katód anyagától függő kilépési munka.

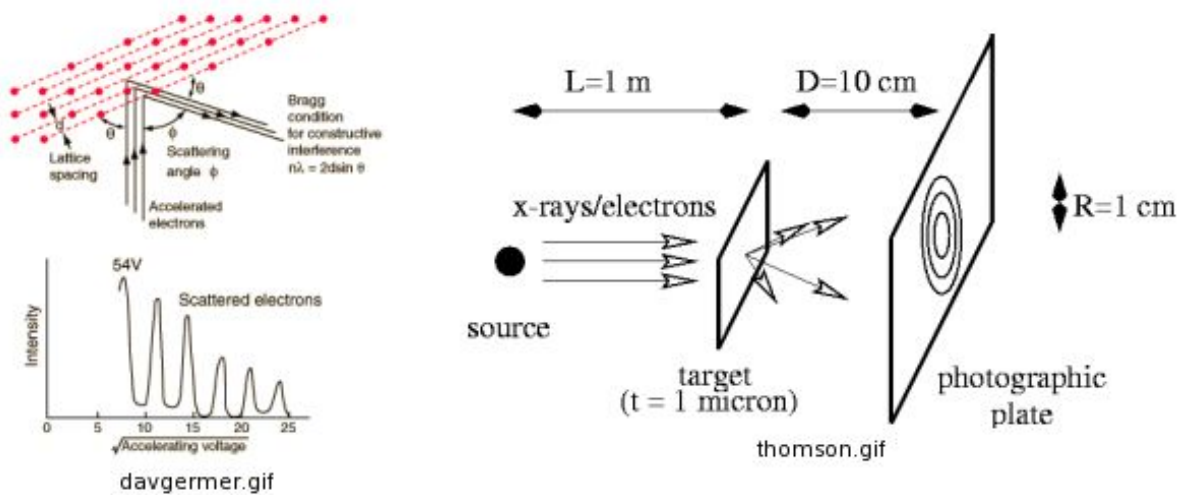
Magyarázatot Einstein adott: Planck-féle kvantumosságot feltételezve (Planck tiltakozása ellenére!!), a fény mint részecske (korpuzzkula) tekinthető és energiája csak $h\nu$ lehet.

1.1.4. A Compton-effektus



Az elektronnal ütköző foton energiát veszít, ennek megfelelően a frekvenciája is megváltozik! A *foton részecskeként* viselkedik, nem csak mint hullám szóródott!

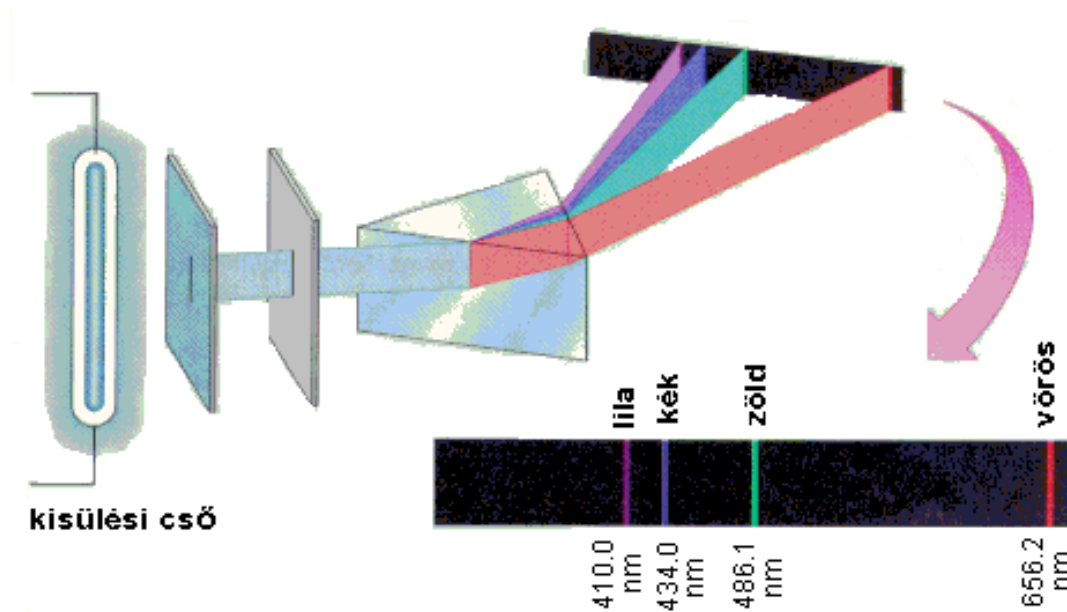
1.1.5. Elektronsugár szóródása



Davisson és Germer (1927), valamint G.P. Thomson (1928)
Az elektron, mint hullám.

1.1.6. A hidrogén atom

A hidrogén atom spektruma vonalas:



A vonalak elhelyezkedését Balmer írta le először (ún. Balmer-képlet):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, 6 \quad (1)$$

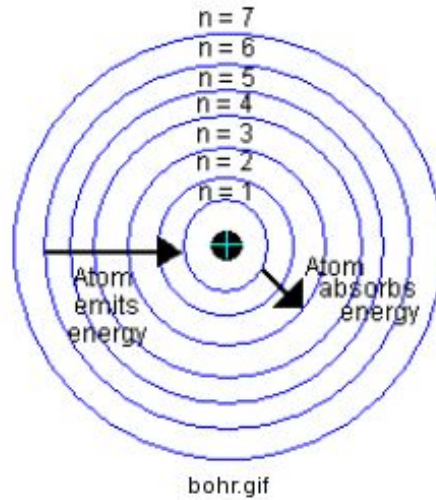
R az ún. Rydberg-állandó, λ a hullámhossz.

Miután kiderült, hogy a fény energiát hordoz, arra lehetett következtetni, hogy a H-atom energiája csak bizonyos értékeket vehet fel.

Hogyan lehetséges ez? A H-atomban egy elektron „kering” az atommag (proton) körül, energiája a pálya sugarától függhet. De:

- Miért nem lehet ez akármekkora?
- Miért nem zuhan bele az elektron a magba, hiszen a keringő töltés elektromágneses teret kelt?

Magyarázat: Bohr-féle atommodell, amely kvantumfeltételeket posztulál:



- bizonyos sugarú „pályák” esetén az elektron nem sugároz; ezek a stabil (stacionárius) állapotok
- ha az elektron az egyik pályáról átugrik a másikra, energiát sugároz (vagy nyel el).
- az energia lehetséges értékei:

$$E = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^2}{a_0} \quad n \text{ egész} \quad (2)$$

(e az elektron töltése, a_0 az atomi hosszúságegység (1 bohr)).

A He-atomra már nem jó!!!!

1.1.7. Összefoglalás

Jelenség	Új fogalom	Név
fekete test sugárzás	energia kvantált ($h\nu$)	Planck (1900)
fotoelektromos effektus	fény energiája kvantált	Einstein (1905)
hőkapacitás kis hőmérsékleten 0-hoz tart	anyag energiája kvantált	Einstein (1905), Debye
Compton-effektus	elektromágneses sugárzás részecskeként viselkedik	Compton (1923)
Elektronok interferenciája	elektron hullámként is viselkedik	Davisson (1927), G.P. Thomson (1928)

Jelölések:

- ν a fény frekvenciája
- λ a fény hullámhossza ($\lambda = \frac{c}{\nu}$)
- c a fénysebesség
- $h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js$ a Planck állandó
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Fontos következtetés: részecske-hullám dualizmus (az anyag kettős természete)

F. de Broglie képlete (1924!!!) megadja a részecske impulzusa (p) és a hullámhossz (λ) közötti összefüggést:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3)$$

Az addigi elméleteket alapjaiban kellett átírni. Bohrnak még sikerült ú.n. kvantumfeltételek bevezetésével a H-atom energiaszintjeit megadni (l. Bohr-féle atommodell), de az elmélet már a heliumra sem működött.

Új elmélet

- Heisenberg (1925): Mátrixmechanika
- Schrödinger (1926): Hullámmechanika

A két elmélet ekvivalensnek bizonyult, ma ezt nevezzük (nem-relativisztikus) kvantummechanikának.

1.2. A kvantummechanika alapelvei

1.2.1. Az operátor fogalma

Mi az operátor? Függvényből egy másik függvényt csinál:

$$\hat{A}f(x) = g(x)$$

Egy operátor *sajátfüggvényének* nevezzük azokat a függvényeket, melyeket az operátor csak egy konstans erejéig változtatja meg:

$$\hat{A}f(x) = af(x)$$

ahol a egy konstans, az operátor *sajátértéke*.

Példa: Legyen:

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$$

Ekkor $\cos(x)$ ennek az operátornak a sajátfüggvénye, mert:

$$\hat{A}\cos(x) = \frac{d^2 \cos(x)}{dx^2} = -\cos(x)$$

a sajátérték pedig -1 .

1.2.2. Schrödinger-egyenlet

Egy rendszer (pl. atom, molekula) stacionáris állapotait az ún. (időfüggetlen) Schrödinger-egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (4)$$

ahol:

- $\hat{H}$ a rendszer Hamilton-operátora;
- $\Psi(x)$ a rendszer állapotfüggvénye, a koordináta függvénye;
- E a rendszer energiája.

Dirac (1929) szerint az egész kémia benne van!

1.2.3. Hamilton-operátor

A rendszer Hamilton-operátora ($\hat{H}$) a kinetikus ($\hat{T}$) és a potenciális energia ($\hat{V}$) operátorok összege:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \quad (5)$$

1.2.4. Állapotfüggvény

A kvantummechanikában rendszer állapotát az állapotfüggvény határozza meg, mely a részecske koordinátáitól függ:

$$\Psi = \Psi(x, y, z) = \Psi(\underline{r}) \quad (6)$$

vagy n részecske esetén:

$$\Psi = \Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = \Psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n) \quad (7)$$

A hullámfüggvénynek fizikai jelentése nincs, csak az ún. sűrűségfüggvénynek adható valószínűségi értelmezés:

$$\Psi^*(x^0, y^0, z^0) \cdot \Psi(x^0, y^0, z^0) dx dy dz \quad (8)$$

annak a valószínűsége, hogy a részecske az (x^0, y^0, z^0) pontban (precízen infinitezimális környezetében) található.

Rövidebb jelölés: $\Psi^* \Psi dv$ vagy $|\Psi|^2 dv$

Normált függvény kell, hiszen a teljes térben biztosan megtaláljuk a részecskét:

$$\int \int \int \Psi^* \cdot \Psi dx dy dz = 1 \quad (9)$$

1.2.5. További fizikai mennyiségek

A többi fizikai mennyiséghez is operátort rendelünk.

Fontos operátorok:

- koordinátaoperátor: $\hat{x} \quad (\hat{x}f(x) = xf(x))$
- impulzusoperátor: $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- kinetikus energia operátora: $\hat{T} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \equiv -\frac{1}{2m} \Delta$
- ...

A koordináta ($\hat{x}$) és az impulzus ($\hat{p}_x$) operátorokra fennáll, hogy kommutátoruk ($[\cdot, \cdot]$):

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar \quad (10)$$

azaz a két operátor *nem cserélhető fel!*

1.2.6. Fizikai mennyiségek mérése

A kvantummechanika posztulátumai szerint a fizikai mennyiség mérésekor csak a megfelelő operátor sajátértékét kaphatjuk:

$$\hat{A}\phi_i^A = a_i\phi_i^A \quad i = 1, \dots \quad (11)$$

Ez egy ún. sajátértékegyenlet, ϕ_i^A az $\hat{A}$ operátor sajátfüggvénye, a_i a sajátértéke.

Sok fizikai mennyiség sajátértékei diszkrétnek (nem vehetnek fel akármilyen értéket), azaz a fizikai mennyiségek, így az energia is, kvantáltak!!!

Más mennyiségek, mint a koordináta azonban „folytonos spektrummal” rendelkeznek, azaz értékük folytonosan változik.

Megmérjük a $\hat{A}$ operátorhoz tartozó fizikai mennyiséget (A) egy Ψ hullámfüggvénnyel jellemzett rendszeren. Mit kapunk?

- a) Ha a rendszer állapota összeesik $\hat{A}$ egyik sajátfüggvényével, akkor a megfelelő sajátértéket kapjuk: $\Psi = \phi_i^A \rightarrow A = a_i$
- b) Ha rendszer állapota nem esik össze $\hat{A}$ egyik sajátfüggvényével, akkor a mérés eredményének kimenetelét nem lehet megadni: $\Psi \neq \phi_i^A \rightarrow A = ?$.

Az azonban biztos, hogy valamely sajátértéket kaphatjuk csak, de nem tudjuk előre melyiket.

Megadható azonban a mérés ún. várható értéke: $\bar{A} = \int \Psi(x) \hat{A} \Psi(x) dx$, a mérés eredményei e körül fognak szórni ΔA szórással (bizonytalanság).

Tehát a mérés: nem kívülálló szemlélődés, hanem beavatkozás rendszerbe.

1.2.7. Fizikai mennyiségek együttes mérése, Heisenberg-féle határozatlansági elv

Két fizikai mennyiség csak akkor mérhető egyszerre, ha operátoraik felcserélhetők (kommutálnak):

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (12)$$

Ha ez nem teljesül, a két mennyiség nem mérhető tetszőleges pontossággal:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (13)$$

↓

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\bar{C}| \quad (14)$$

A és B mennyiségek mérése bizonytalanságának $(\Delta A, \Delta B)$ szorzata nem lehet kisebb egy bizonyos értéknél, mely a kommutátorukból származtatható.

Pl. a koordinátára és az impulzusra:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \neq 0 \quad (15)$$

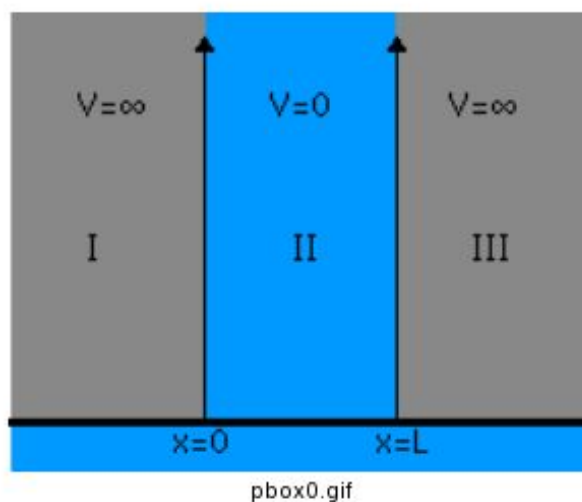
↓

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (16)$$

1.2.8. A potenciáldoboz kvantummechanikai leírása

Rendkívül tanulságos a potenciáldoboz ("részecske a dobozban", "dobozba zárt részecske", stb.) megoldása:

Hamilton-operátor:



$$\begin{aligned} V(x) &= 0, \quad 0 < x < L \\ V(x) &= \infty, \quad \text{máshol} \end{aligned}$$

Tehát az L hosszúságú dobozon belül:

$$\hat{H} = \hat{T} + \underbrace{V(x)}_0,$$

A dobozon kívül nem lehet a részecske, ezért a folytonossági feltétel miatt a következő *peremfeltételt* kell figyelembe venni:

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0 \quad (17)$$

Megoldandó tehát:

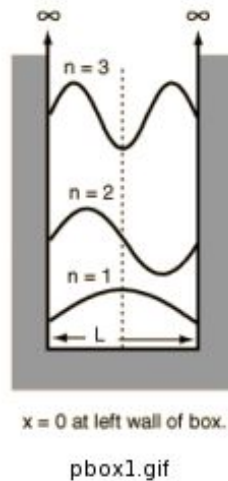
$$\hat{T}\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (18)$$

Rövid (és tanulságos) számolás után kapjuk a következő megoldást:

$$E = n^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

A hullámfüggvények alakjai:



Megjegyzések:

- Az energia kvantált, n-nel négyzetesen nő (azaz a szintek n növelésével egyre távolabb kerülnek egymástól), L^2 -tel fordítottan arányos.

Ha tehát $L \rightarrow \infty$, $E_2 - E_1 \sim \frac{2^2 - 1^2}{L^2} \rightarrow 0$. Azaz az energia kvantáltsága $L = \infty$ esetben megszűnik.

Ugyanez van $m \rightarrow \infty$ esetén is!!

- Van ún. zéruspont energia (ZPE)!!

Az energia nem 0 a legalacsonyabb energiájú állapotban (alapállapot).

Ha azonban $L \rightarrow \infty$, $E_0 \rightarrow 0$.

Miért van ZPE?

A bizonytalansági elv miatt: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$.

Mivel itt $\hat{V} = 0$, $E \sim p^2$.

Tegyük fel, hogy $E = 0$, ekkor $p = 0$, ezért $\Delta x = \infty$, ami ellentmondás, hiszen $\Delta x \leq L$.

Másként: ha $L \rightarrow 0 \implies \Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta p \rightarrow \infty \implies \Delta E \rightarrow \infty$.

Annál nagyobb KELL legyen bármely állapot energiája, minél kisebb L . Az energia sosem lehet 0, mert akkor p is 0 lenne, azaz nem lenne határozatlansága.

- Hullámfüggvény: Minél nagyobb n , annál több a csomósík! (*Csomósík*: ahol a hullámfüggvény előjelet vált.)
- Hogyan fest a megoldás három dimenzióban?

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_a^2}{a^2} + \frac{n_b^2}{b^2} + \frac{n_c^2}{c^2} \right),$$

ahol a, b, c a téglatest élhosszai, és $n_a, n_b, n_c = 1, 2, \dots$

Hogyha $a = b = L$, akkor

n_a	n_b	$E \left(\frac{h^2}{8mL^2} \right)$
1	1	2
2	1	5
1	2	5

Degeneráció jelenik meg, a doboz szimmetriája miatt!!!

2. A szimmetriák elmélete

2.1. Szimmetriaműveletek

Mi a szimmetria? Térbeli szabályosság. Ezt matematikailag úgy lehet megfogni, hogy a tárgy bizonyos *jellemző* szimmetriaműveletek után sem változik.

Példák:

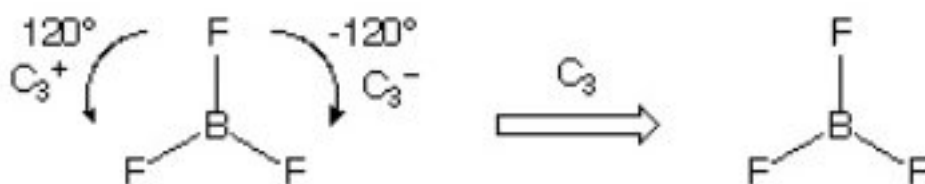
- Egy szimmetrikus épületet a középén átmenő síkra tükrözve ugyanazt az épületet kapom.
- Körhintát elforgatom annyival, hogy az egyik ülés a másik helyére kerüljön, semmi nem változik.
- Egy tojást a tengelye körül *bármekkora* szöggel elforgatok, még mindig ugyanazt látom.

A molekulák is rendelkeznek hasonló tulajdonságokkal. Például:

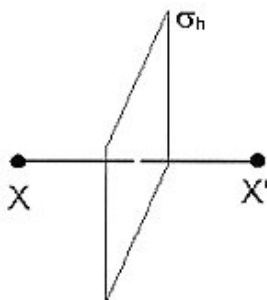
- A víz molekulát tükrözhetem a molekula síkjára, az oxigén atomon és a két hidrogén között húzódó síkra is, de akár elforgatható az oxigén atom körül 180 fokkal.
- Az ammónia molekulát elforgathatom 120 fokkal, vagy tükrözhetem a nitrogénen, az egyik hidrogénen és a másik két hidrogén között elhaladó síkra is.

Gyűjtsük össze a lehetséges szimmetriaműveleteket:

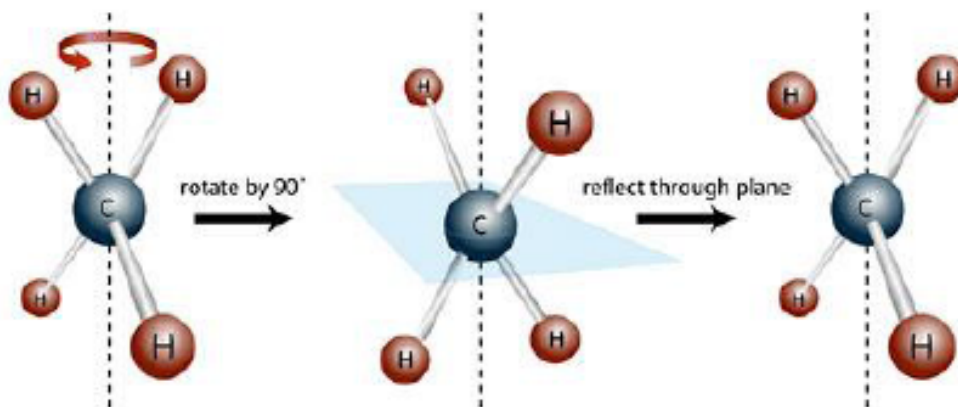
- C_n – tengely körüli forgatás $2\pi/n$ szöggel (ún. *gír*)



- σ – tükrözés adott síkra (speciális esetek: σ_v , σ_h , σ_d , l. később)



- S_n – forgatás-tükrözés: a C_n gír és σ_h (tengelyre merőleges) tükrözés kombinációja, önálló művelet (ún. *giroid*)



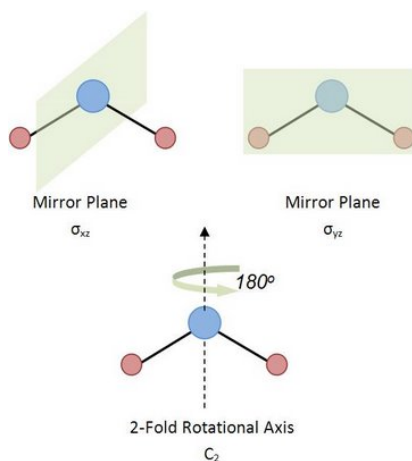
- i – tükrözés egy pontra, inverzió ($i = S_2$)
- E – azonosság (egységművelet): csak matematikai okokból kell, nem csinál semmit, vagy önmagára képez le, minden objektumot változatlanul hagy

2.2. Pontcsoportok

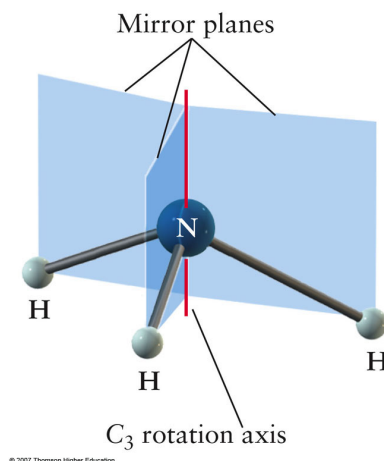
Most visszatérhetünk a kérdésre: mi a szimmetria? Azon műveletek összessége, melyek az objektumot nem változtatják meg.

Kémiai példák:

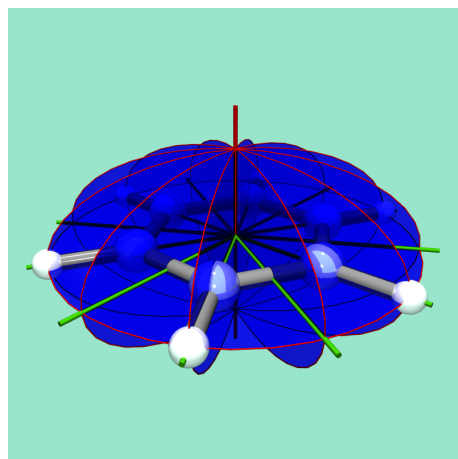
- víz: $C_2(z)$, σ_{zx} , σ_{zy} , E



- ammónia: $C_3(z)$, 3 db σ_v , E



- benzol: C_6 , 6 db C_2 , σ_h (horizontális, tengelyre merőleges), 6 db σ_v (tengelyt magában foglaló), i , ezek kombinációjaként még továbbiak is.



- formaldehid: $C_2(z)$, σ_{zx} , σ_{zy} , E

Tehát a molekuláinkat jellemzik azok az operátorok, melyek a molekulát nem változtatják meg. Láthatjuk, hogy ezek nem a molekula, hanem a szimmetria sajátjai, hiszen pl. a víz és a formaldehid esetén ugyanazok. Az operátorok ilyen csoportjait *pontcsoportnak* hívjuk. (Az elnevezés azt takarja, hogy ezek az operátorok matematikai értelemben „csoportot” alkotnak.) A pontcsoportokat az ún. Schönflies-szimbólumokkal¹ jellemezzük:

- C_n : C_n műveletet tartalmazó csoportok
- C_{nv} : C_n műveletet, valamint a tengelyt magában foglaló tükörsíkot (σ_v) tartalmazó csoportok
- C_{nh} : C_n műveletet, valamint a tengelyre merőleges tükörsíkot (σ_h) tartalmazó csoportok
- D_n : C_n műveletet valamint erre merőleges n db. C_2 forgatást tartalmazó csoportok
- D_{nh} : C_n műveletet valamint erre merőleges n db. C_2 forgatást, valamint a főtengetyre merőleges tükrözést tartalmazó csoportok
- D_{nd} : C_n műveletet valamint erre merőleges n db. C_2 forgatást, valamint a főtengety magában foglaló tükrözést tartalmazó csoportok
- S_n : S_n műveletet tartalmazó csoportok
- T_d : tetraéderes szimmetriával rendelkező csoportok
- ...
- $C_{\infty v}$: Végtelen fogású tengellyel és ezt magában foglaló tükrözéseket tartalmazó csoportok
- $D_{\infty h}$: Végtelen fogású tengellyel, ezt magában foglaló tükrözéseket valamint a tengelyre merőleges tükrözést is tartalmazó csoportok

¹Arthur Moritz Schönflies (1853-1928) német matematikus.

- O_3^+ : gömbi szimmetriával rendelkező csoport
- ...

Schönflies-féle jelölés

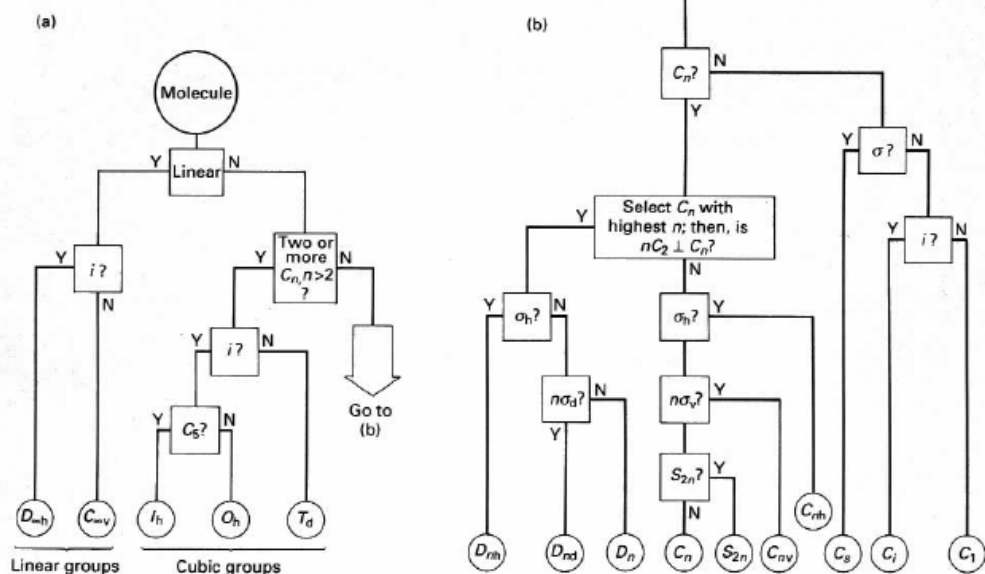
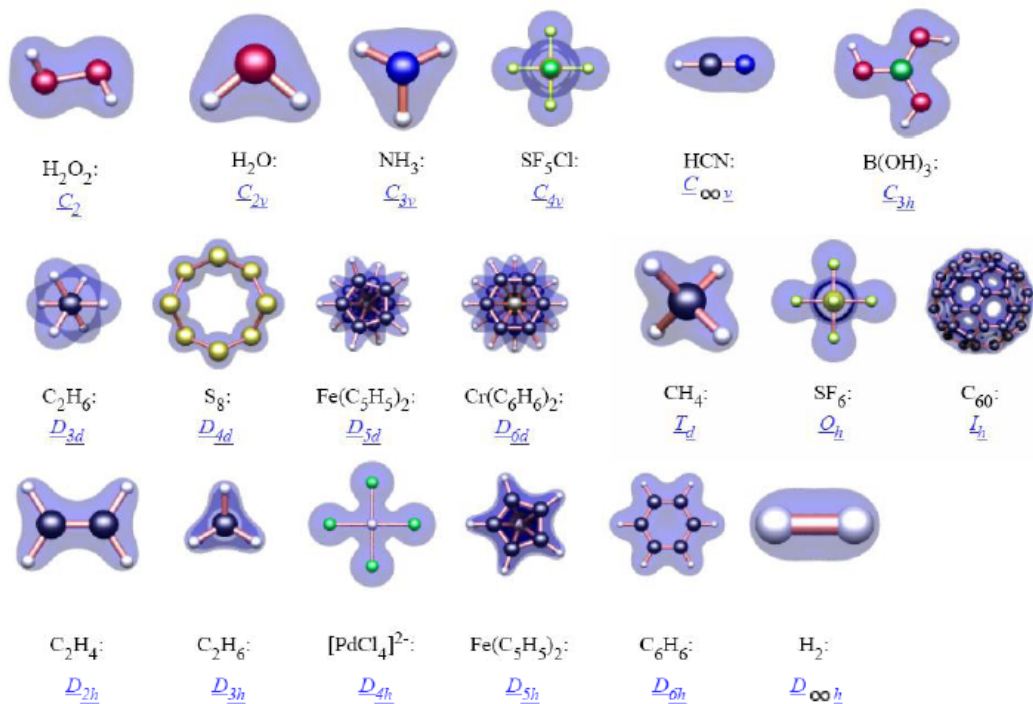


Figure 3.15
 Shriver, Atkins, and Langford: *INORGANIC CHEMISTRY*, second edition
 ©1990, 1994 D. F. Shriver, P. W. Atkins, and C. H. Langford
 W. H. Freeman and Company

Kémiai példák:

molekula	szimmetriaműveletek	pontcsoport jele
víz	$C_2, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, E$	C_{2v}
ammónia	$C_3(z), 3 \text{ db } \sigma_v, E$	C_{3v}
benzol	$C_6, 6 \text{ db } C_2, \sigma_h, 6 \text{ db } \sigma_v, i, \text{ stb.}$	D_{6h}
formaldehid	$C_2(z), \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, E$	C_{2v}
etilén		D_{2h}
acetilén		$D_{\infty h}$
szénmonoxid		$C_{\infty v}$



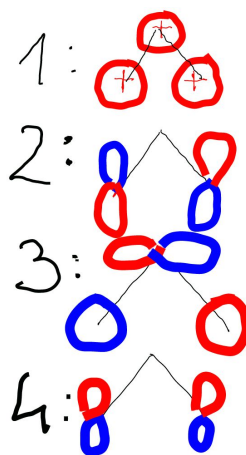
<http://newton.ex.ac.uk/research/qsystems/people/goss/symmetry/Molecules.html>

2.3. Reprezentációk, karaktertábla

Tehát pontcsoportjához tartozó szimmetriaműveletek hatására a molekula nem változik. Ebből következik, hogy a molekula hullámfüggvénye sem változhat, esetleg előjelet válthat (hiszen fizikai jelentése a hullámfüggvény négyzetének van).

Egy függvényt jellemezhetünk aszerint, hogy a pontcsoport elemei hatására előjelet vált, vagy nem. Pl. víz esetén hány féle lehetőség van?

Sorszám	E	C_2	σ_{zx}	σ_{zy}
1	1	1	1	1
2	1	1	-1	-1
3	1	-1	1	-1
4	1	-1	-1	1



Több lehetőség nincs, mert bizonyos kombinációk kizárják egymást. Ebből következik, hogy bármely, a vízmolekulát jellemző függvényt e négy csoportba sorolhatom. Ezek mind a fenti táblázat egy-egy sorának felelnek meg, azaz a pontcsoportot „*reprezentálják*”. Ezért *tovább nem bontható reprezentációknak* vagy idegen szóval *irreducibilis reprezentációk*-nak (röviden *irrep*) nevezzük ezeket.

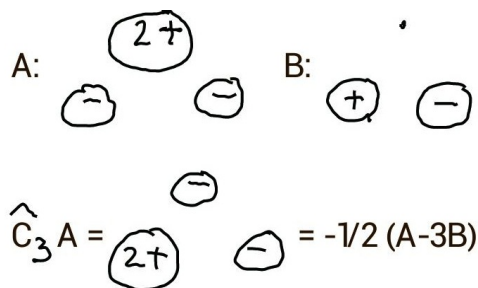
Az irreducibilis reprezentációkat és ezek szimmetriaműveltire vonatkozó jellemzőjét (karakter) a *karaktertáblázat* tartalmazza. Pl. a C_{2v} pontcsoport karaktertáblája:

C_{2v}	E	C_2	σ_{zx}	σ_{zy}
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

Vegyük észre, hogy fentebb pont ezt alkottuk meg, amikor a lehetséges előjeleket beírtuk, csak most az első oszlopban új elnevezést vezettünk be!

„*Nagyon szimmetrikus*” rendszerek esetén az *irrepek* nem egydimenziósak, bizonyos szimmetriatulajdonságok kettő vagy több függvénnyel írhatók csak le. Erre példa az ammónia molekula (C_{3v} pontcsoport):

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0



$$\hat{C}_3 B = -1/2 (A + B)$$

Milyen tulajdonságok következnek ebből? Tekintsünk két függvényt, amelyek egy $\hat{A}$ operátor sajátfüggvényei, és ugyanahhoz a sajátértékhez tartoznak. Az utóbbi miatt nyilván nem különböztethetők meg a szimmetriatulajdonságaik alapján sem, ezért szükségképpen a csoport azonos reprezentációjához tartoznak, ami csak úgy lehetséges, ha a reprezentáció többdimenziós. Vegyük észre, hogy ez a gondolatmenet támasztja alá a „degeneráció oka a szimmetria” kijelentést.

Ha egy pontcsoport reprezentációi között vannak többdimenziósak, akkor a rendszerben lesznek degenerált állapotok, a degeneráció foka éppen annyi, mint a reprezentáció dimenziója. (Ez a karaktertáblából kiolvasható, az E egységoperátor karaktereként.)

A fenti példákban:

- az ammónia molekulának lesznek kétszeresen degenerált energiaszintjei.
- a víznek pedig nem lesznek
- atomokban egyszeresen, háromszorosan, ötszörösen,... degenerált állapotok vannak, hiszen az O_3^+ csoportnak egy, három, öt, stb. dimenziós irreprekci vannak.

Néhány elnevezés:

Karakter: a karaktertáblában műveletek alatti számok: minden művelthez és irreprekhez tartozik egy karakter („jellemző”). Egydimenziós eset szemléletes: 1 esetén a függvény szimmetrikus, -1 esetén antiszimmetrikus az adott műveletre.

Irrepek jele: a karaktertábla első oszlopa; a jelölésben A , B egydimenziós, E kétdimenziós, F , T háromdimenziós irrepeket jelöl. Kivétel: $C_{\infty v}$ és $D_{\infty h}$ csoportok, ahol az egydimenziós irrepeket Σ , a kétdimenziósakat Π , Δ , stb. jelöli.

Teljesen szimmetrikus (totálszimmetrikus) reprezentáció: karakterei az összes műveletre 1, azaz az ilyen függvények a pontcsoport összes műveletére szimmetrikusak (nem változnak). Jele általában tartalmazza az A_1 -et, de a $D_{\infty h}$ pontcsoport esetén Σ_g^+ ,

A reprezentáció dimenziója: Az egységoperátor karaktere a reprezentáció dimenzióját adja.

Néhány kiválasztott karaktertábla

Character table for C_{2v} point group

	E	$C_2(z)$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$		
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
E_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
E_2	1	-1	-1	1	y, R_x	yz

Character table for C_{3v} point group

	E	$2C_3(z)$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	x^2+y^2, z^2
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y) (R_x, R_y)$	$(x^2-y^2, xy) (xz, yz)$

Character table for D_{3d} point group

	E	$2C_3$	$3C_2$	i	$2S_6$	$3\sigma_v$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1		x^2+y^2, z^2
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1	R_z	
E_g	2	-1	0	2	-1	0	(R_x, R_y)	$(x^2-y^2, xy) (xz, yz)$
A_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	1	z	
E_u	2	-1	0	-2	1	0	(x, y)	

Character table for D_{6h} point group

	E	$2C_6$	$2C_3$	σ_h	$2S_6$	$3\sigma_v$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1		x^2+y^2, z^2
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1	R_z	
E_g	2	-1	0	2	-1	0	(x, y)	(x^2-y^2, xy)
A_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	1	z	
E_u	2	-1	0	-2	1	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)

Character table for T_d point group

	E	$8C_3$	$6C_2$	$6S_4$	$8S_6$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2+y^2+z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2x^2-x^2-y^2, x^2-y^2)$
T_2	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_1	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

Character table for D_{2h} point group

	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$		
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1		x^2, y^2, z^2
B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	R_y	xz
B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	R_x	yz
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	z	
B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	y	
B_{3u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	x	

Character table for D_{4h} point group

	E	$2C_4$	$2C_2$	C_2	$2C_2'$	$2C_2''$	i	$2S_4$	σ_h	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		x^2+y^2, z^2
A_{2g}	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	R_z	
B_{1g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		
B_{2g}	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1		
E_g	2	1	-1	-2	0	0	2	1	-1	-2	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)
E_u	2	-1	-1	2	0	0	2	-1	-1	2	0	(x^2-y^2, xy)	
A_{1u}	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	z	
B_{1u}	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1		
B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		
E_u	2	1	-1	-2	0	0	-2	-1	1	2	0	(x, y)	
E_g	2	-1	-1	2	0	0	-2	1	1	-2	0		

Character table for $C_{\infty v}$ point group

	E	$2C_\infty$	∞C_2	$\infty \sigma_v$	linear, rotations	quadratic
$A_1=\Sigma^+$	1	1	...	1	z	x^2+y^2, z^2
$A_2=\Sigma^-$	1	1	...	-1	R_z	
$E_1=\Pi$	2	$2\cos(\Phi)$	...	0	$(x, y) (R_x, R_y)$	(xz, yz)
$E_2=\Delta$	2	$2\cos(2\Phi)$	...	0		(x^2-y^2, xy)
$E_3=\Phi$	2	$2\cos(3\Phi)$	...	0		
...	...	...	...	...		

Nonaxial $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_{\infty}$
 $C_{nv}, C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}, C_{\infty v}; C_{nh}, C_{2h}, C_{3h}, C_{4h}, C_{6h}, C_{\infty h}$
 $D_2, D_3, D_4, D_6, D_{\infty}; D_{nh}, D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}, D_{\infty h}$
 $D_{nd}, D_{2d}, D_{3d}, D_{6d}, S_8, S_6, S_{12}, S_{24}$
 Higher T_d, O_h, I_h ; Linear $C_{\infty}, D_{\infty h}$

2.4. Direktszorzat-reprezentáció

Tekintsünk két függvényt, az egyik $(\Psi_1(x))$ tartozzon a pontcsoport Γ_1 irreducibilis reprezentációjához, a másik $(\Psi_2(y))$ pedig a Γ_2 irreprehez. Kérdés: hogyan transzformálódik a $\Psi(x, y) = \Psi_1(x) \cdot \Psi_2(y)$ szorzatfüggvény?

Külön-külön hatunk a szimmetriaműveletekkel (R):

$$\hat{R}(\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(y)) = R\Psi_1(x) \cdot R\Psi_2(y) = k_1^R \cdot \Psi_1(x) \cdot k_2^R \cdot \Psi_2(y) = k_1 k_2 \cdot \Psi_1(x) \cdot \Psi_2(y) = k_1 k_2 \cdot \Psi(x, y),$$

ahol k_i^R az $\hat{R}$ szimmetriaművelet i irreprehez tartozó karaktere. Speciális esetek:

- ha Γ_1 a totalszimmetrikus reprezentáció volt, akkor világos, hogy a szorzatfüggvény úgy fog transzformálódni, mint Γ_2 ;
- ha Γ_1 és Γ_2 egydimenziós irrepek, akkor a karakterek összeszorzódnak, a karakterek összeszorzásával lehet megkapni az új irrepet.

Általában azt mondjuk, hogy a két irrep „*direktszorzat*”-át kell képezzük:

$$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$$

A direktszorzat gyakran nem irreducibilis (több dimenziós reprezentációk esetén), ilyenkor redukálással több irrep összegére bontható. A direktszorzatok táblázatokban megtalálhatók, de a megfelelő elmélet ismeretében ki is számíthatók.

2.5. A hidrogénatom kvantummechanikai leírása

2.5.1. A H-atom Hamilton-operátora

Atomi egységek

Hogy ne kelljen annyit írni, vezessük be az ún. atomi egységrendszert:

Fiz. menny.	Atomi egys.	SI	Átváltás
Imp.mom.	$\hbar$	$[J\ s]$	$\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-34} J\ s$
Tömeg	m_e	$[kg]$	$m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31} kg$
Töltés	e	$[C]$	$e = 1,6022 \cdot 10^{-19} C$
Permittivitás	$4\pi\epsilon_0$	$[\frac{C^2}{Jm}]$	$4\pi\epsilon_0 = 1,11265 \cdot 10^{-10} \frac{C^2}{Jm}$
Ezekből levezethető:			
Hosszúság	a_0 (<i>bohr</i>)	$[m]$	$1\ bohr = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529177 \cdot 10^{-10} m$
Energia	E_h (<i>hartree</i>)	$[J]$	$1\ hartree = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = 4,359814 \cdot 10^{-18} J$
			$1\ E_h \approx 27,21\ eV$
			$E_h \approx 627\ kcal/mol$

A Hamilton-operátor (SI egységekben):

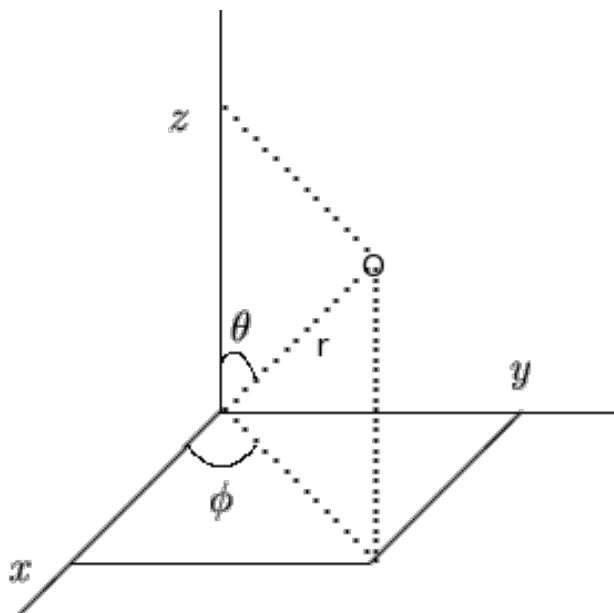
$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

azaz a potenciál a proton és az elektron Coulomb-vonzása.

A Hamilton-operátor (atom egységben):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{r}$$

Térjünk át gömbi polárkoordinátákra, hiszen a H-atom (és a többi atom is) gömbi (radiális) szimmetriával rendelkezik:



$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta$$

2.5.2. A H-atom Schrödinger-egyenletének megoldása

Mivel $\hat{l}_z$ és $\hat{l}^2$ csak φ -tól és ϑ -tól függ, a hullámfüggvény alakja:

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Sajátfüggvények:

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) = R(r) \Theta_l^m(\vartheta) e^{im\varphi} \quad (19)$$

A sajátértékek (hartree egységben):

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} (E_h) \quad (20)$$

A kvantumszámok:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (22)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, 0, l-1, l \quad (23)$$

2.5.3. A megoldás diszkussziója

A megoldás diszkussziója: energia

- az energiaszintek n növelésével egyre sűrűsödnek;
- az energia csak n -tól függ, míg a sajátfüggvények l -tól és m -tól is $\rightarrow$ nagyfokú degeneráció!! (l. lentebb);
- a formula megegyezik a Bohr-féle képlettel, így a Balmer($n_1 = 2, \text{VIS}$) és Lyman($n_1 = 1, \text{UV}$)-sorozatot is leírja.

Emlékeztetőül a Balmer-képlet:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

A megoldás diszkussziója: degeneráció

Az energia n^2 -szeresen degenerált l és m szerint, hiszen:

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Példa:

n	deg.	
1	1	1 db s
2	4	1db s, 3 db p
3	9	1db s, 3 db p, 5 db d

Mi a degeneráció oka?

- m szerint: a rendszer gömbi szimmetriája – megmarad többelektronos atomoknál is;
- l szerint: $\frac{1}{r}$ miatt (a Coulomb-tér szimmetriája) – el fog tűnni a többelektronos atomoknál

A megoldás diszkussziója: sajátfüggvény

A teljes sajátfüggvény tehát:

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta_l^m(\vartheta) e^{im\varphi} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots \\ l &= 0, 1, \dots, n-1 \\ m &= -l, \dots, 0, \dots, l \end{aligned}$$

A függvények:

- r , ϑ és φ polárkoordinátáktól függnnek
- n , l és m kvantumszámok szerint osztályozhatók

Elnevezések l szerint

l	elnevezés	komponensek száma
0	s	1
1	p	3
2	d	5
3	f	7
...		

A függvények jellemzése:

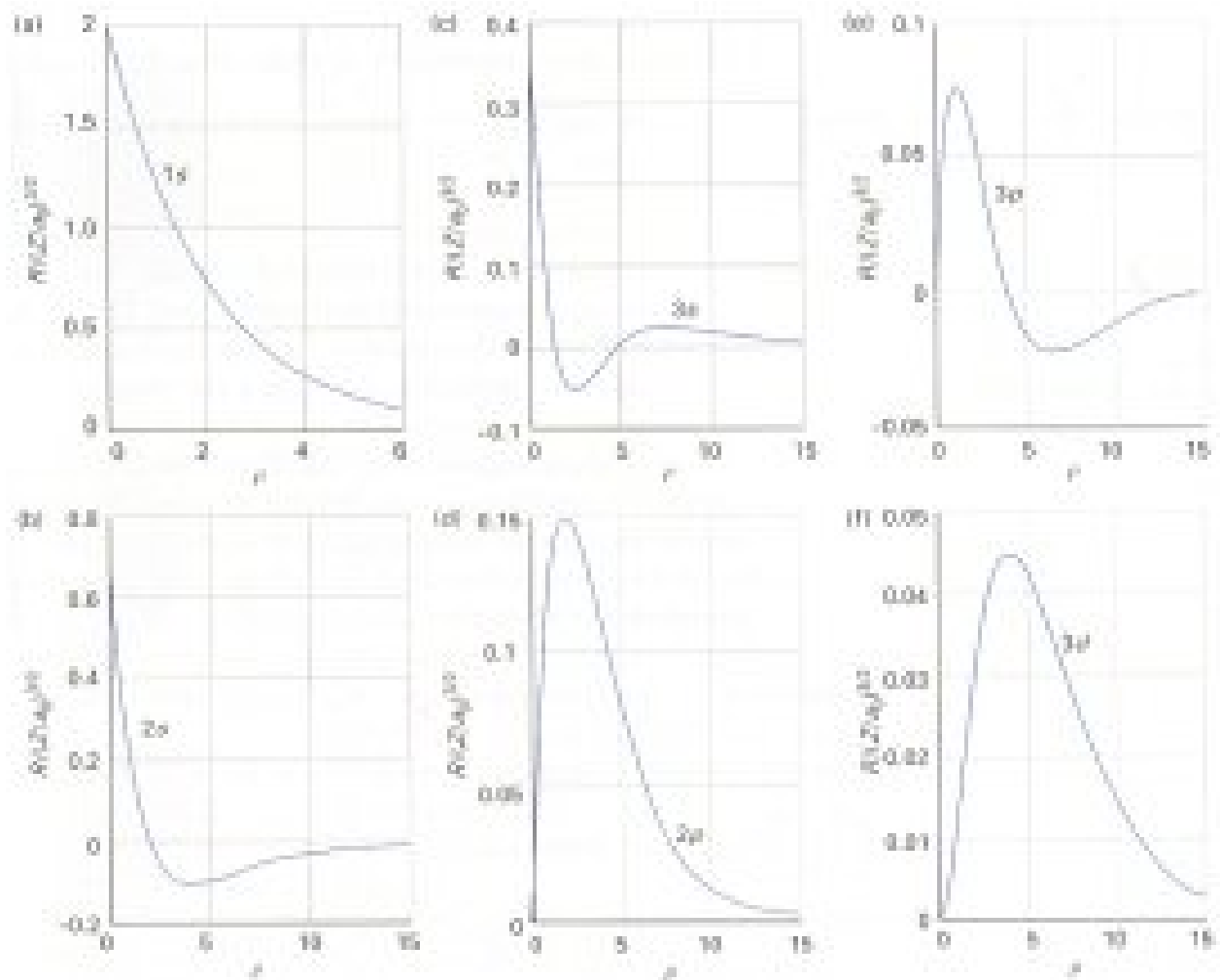
- Radiális rész ($R(r)$): csomósíkok és exponenciális lecsengés
- Szögfüggő rész ($\Theta(\vartheta) e^{im\varphi}$):
 - a térbeli irányítottság;
 - a gömbszimmetria következménye.

A *H*-atom sajátfüggvényei (Ψ_{nlm}):

$$\begin{aligned}
1s & \quad \Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r} \\
2s & \quad \Psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2 - r) e^{-r/2} \\
2p_0 & \quad \Psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} r e^{-r/2} \cos(\vartheta) \\
2p_{\pm 1} & \quad \Psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} r e^{-r/2} \sin(\vartheta) e^{\pm i\varphi} \\
3s & \quad \Psi_{300} = \frac{2}{81\sqrt{3\pi}} (27 - 18r + 2r^2) e^{-r/3} \\
3p_0 & \quad \Psi_{310} = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} r (6 - r) e^{-r/3} \cos(\vartheta) \\
3p_{\pm 1} & \quad \Psi_{31\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} r (6 - r) e^{-r/3} \sin(\vartheta) e^{\pm i\varphi} \\
3d_0 & \quad \Psi_{320} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} r^2 e^{-r/3} (3 \cos^2(\vartheta) - 1) \\
3d_{\pm 1} & \quad \Psi_{32\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} r^2 e^{-r/3} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) e^{\pm i\varphi} \\
3d_{\pm 2} & \quad \Psi_{32\pm 2} = \frac{1}{162\sqrt{\pi}} r^2 e^{-r/3} \sin^2(\vartheta) e^{\pm 2i\varphi}
\end{aligned}$$

(Ezt természetesen nem kell megjegyezni!!!!)

A megoldás diszkussziója: pályák ábrázolása
Radiális rész:



A megoldás diszkussziója: pályák ábrázolása

Szögfüggő rész: iránydiagramm

- ϑ és φ egy irányt jelöl ki a térben
- ebbe az irányba $|Y(\vartheta, \varphi)|$ -vel értékével arányos hosszúságú vektort rajzolunk
- a vektorok végpontjait összekötjük
- $Y(\vartheta, \varphi)$ előjelét jelöljük

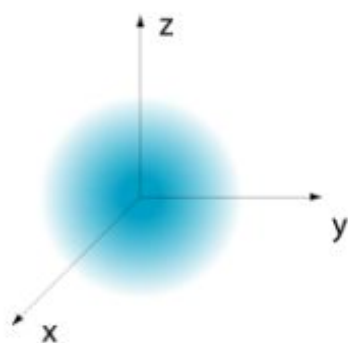
Ábrák: $2p_0$, $1s$, $3d_0$ szerkesztése

A megoldás diszkussziója: pályák ábrázolása

Szögfüggő rész: iránydiagramm

1s orbital

$$n = 1, \ell = 0, m_\ell = 0$$

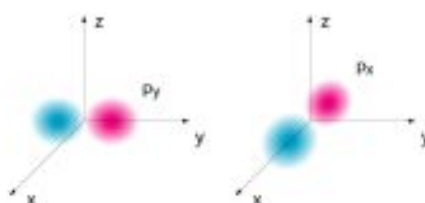
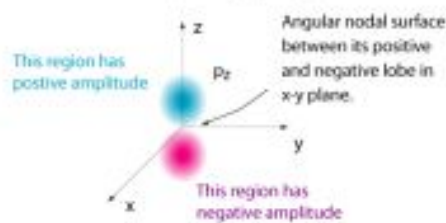


The 1s standing wave function (orbital) is all positive (i.e., no negative lobes) and has no nodal surfaces. It is spherically symmetric.

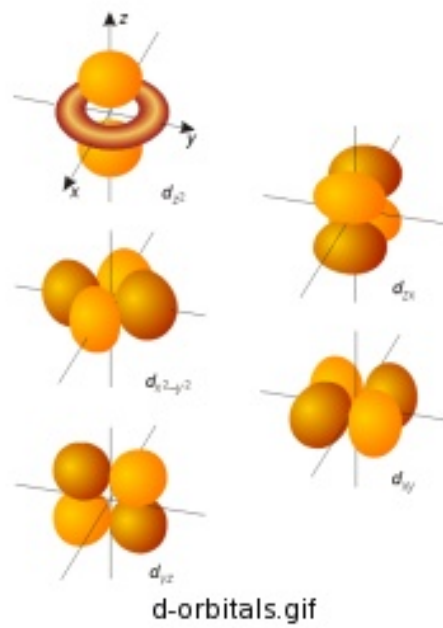
1sOrbital.gif

2p orbitals

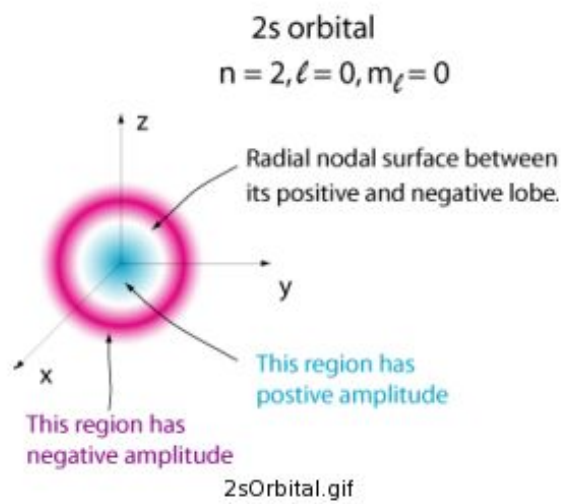
$$n = 2, \ell = 1, m_\ell = -1, 0, +1$$



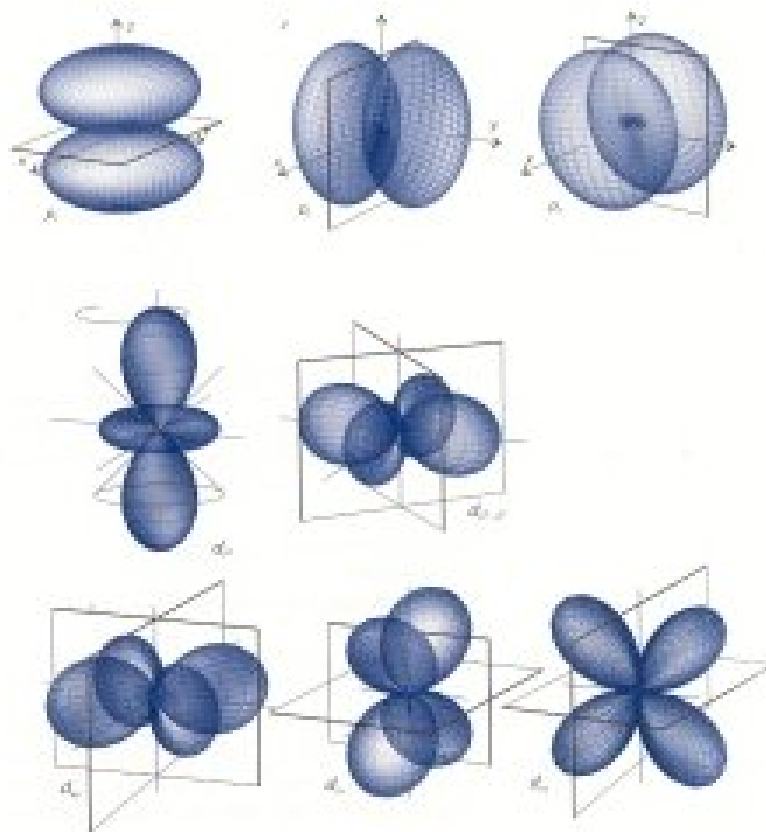
2pOrbitals.gif



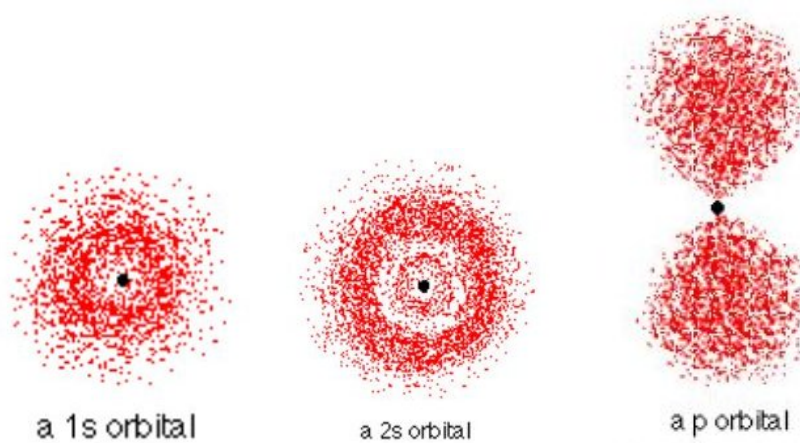
Amit nem látunk az iránydiagramból: radiális részből származó csomófelületek:



A megoldás diszkussziója: pályák ábrázolása
p és d pályák:



A megoldás diszkussziója: pályák ábrázolása
A pályák ábrázolása: pontozás



A megoldás diszkussziója: áttérés valós függvényekre

Miért mutat $2p_0$ függvény a z tengely irányába?

$$2p_0 = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r/2} \underbrace{r \cos(\vartheta)}_z = 2p_z \quad (25)$$

p_1 -et és p_{-1} -et nem tudjuk ábrázolni, mert komplexek. Vegyük valós lineáris kombinációjukat (degenerált függvények bármely lineárkombinációja is sajátfüggvény):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (2p_1 + 2p_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(r e^{-r/2} \sin(\vartheta) e^{i\varphi} + r e^{-r/2} \sin(\vartheta) e^{-i\varphi} \right) \quad (26)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} e^{-r/2} r \sin(\vartheta) \underbrace{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}_{2 \cos(\varphi)} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-r/2} r \sin(\vartheta) \underbrace{\cos(\varphi)}_x = 2p_x \quad (28)$$

$$\frac{1}{i\sqrt{2}} (2p_1 - 2p_{-1}) = 2p_y \quad (29)$$

a $2p_y$ és a $2p_x$ függvények iránydiagramjait l. fentebb!!

Hasonlóan járhatunk el a d függvényekkel is:

$$3d_0 = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} e^{-r/3} \underbrace{r^2 (3 \cos^2(\vartheta) - 1)}_{3z^2} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} e^{-r/3} (3z^2 - r^2) = 3d_{z^2} \quad (30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (3d_1 + 3d_{-1}) = 3d_{xz} \quad (31)$$

$$\frac{1}{i\sqrt{2}} (3d_1 - 3d_{-1}) = 3d_{yz} \quad (32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (3d_2 + 3d_{-2}) = 3d_{x^2-y^2} \quad (33)$$

$$\frac{1}{i\sqrt{2}} (3d_2 - 3d_{-2}) = 3d_{xy} \quad (34)$$

A megoldás diszkussziója: elektronsűrűség

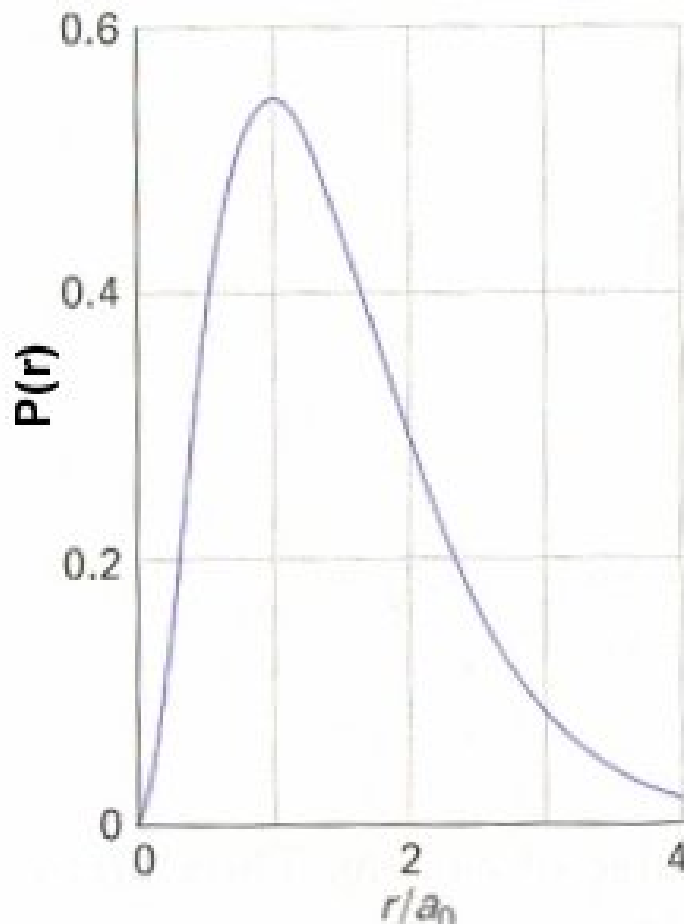
A hullámfüggvénynek nincs fizikai jelentése, a függvény négyzete ($\Psi(r)^* \cdot \Psi(r)dr = |\Psi|^2 dr$) megadja a tartózkodás valószínűségét.

Pontos kérdés: Mi a valószínűsége, hogy az elektron r távolságra van a magtól? Ez tehát nem egy pont, hanem egy gömbhéj!!!! Minél távolabb vagyunk a magtól ez a gömbhéj annál „nagyobb”. Ezért a valószínűséget a következő függvény adja meg:

$$P(r) = 4\pi r^2 \Psi(r)^* \cdot \Psi(r)dr \quad (35)$$

Ezt a mennyiséget *radiális sűrűségfüggvénynek* nevezzük.

Az 1s függvény radiális sűrűségfüggvénye:



A megoldás diszkussziója: atomsugár

Bohr elméletében az atomsugár triviális fogalom: az atom ott „végződik”, ahol a pontoszerű elektron van. Mit jelent ez a kvantummechanika esetén?

Lehetséges kérdések:

- Hol van az elektronsűrűség maximuma?
- Mekkora az átlagos távolság?
- Mi a valószínűsége, hogy az elektron egy r_0 távolságon belül van?

Hol van a (radiális) elektronsűrűség maximuma?

A korábbi ábra alapján a radiális elektronsűrűség maximuma 1s állapot esetén 1 bohr-nál van!

Mekkora az átlagos távolság?

$$\bar{r} = \langle \Psi | \hat{r} | \Psi \rangle \quad (36)$$

1s függvény esetén:

$$\bar{r} = \langle 1s | \hat{r} | 1s \rangle = \frac{3}{2} \quad (37)$$

$$(38)$$

Tehát a H-atom 1s állapotában az elektron magtól való távolságának várható értéke 1.5 bohr.

Analitikusan is megadható:

$$\bar{r} = \frac{a_0}{2} [3n^2 - l(l+1)] \quad (39)$$

Mi a valószínűsége, hogy az elektron egy r_0 távolságon belül van?

Összeadjuk a valószínűségeket (integrálunk) 0-tól az r_0 -ig:

$$\int_{r=0}^{r_0} 4\pi r^2 \Psi^* \cdot \Psi dr \quad (40)$$

$r_0(\text{bohr})$	0.1	0.2	1.	1.5	2.	5
%	0.12	4.8	32.4	57.6	76	99.6

Összehasonlítás a Bohr-moddal (alapállapot, azaz 1s pálya):

	Bohr modell	Kvantummechanika
Valószínűség maximuma	1 bohr	1 bohr
Átlagos távolság	1 bohr	1.5 bohr
Tartózkodási valószínűség 1 bohron belül	100%	32.4%

A megoldás diszkussziója: degeneráltság

A H-atom pályái nagyfokú degeneráltságot mutatnak (l. fentebb is). Az azonos l kvantumszámhoz tartozó pályák degeneráltságának oka a gömbszimmetria.

pálya	l	m	gömbszimmetria miatti degeneráltság
1s	0	0	nincs
2s	0	0	nincs
2p ₀	1	0	háromszorosán degenerált
2p ₁	1	1	
2p ₋₁	1	-1	
3s	0	0	nincs
3p ₀	1	0	háromszorosán degenerált
3p ₁	1	1	
3p ₋₁	1	-1	
3d ₀	2	0	ötszörösen degenerált
3d ₁	2	1	
3d ₋₁	2	-1	
3d ₂	2	2	
3d ₋₂	2	-2	

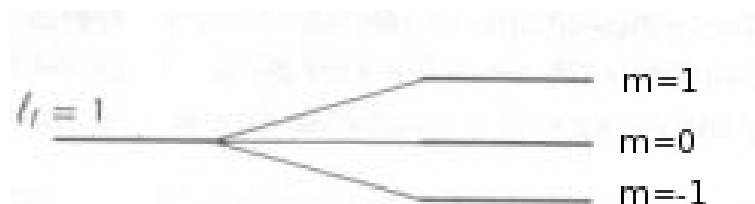
H-atom mágneses térben

Keringő töltés mágneses teret kelt, amely kölcsönhat a külső mágneses térrel.

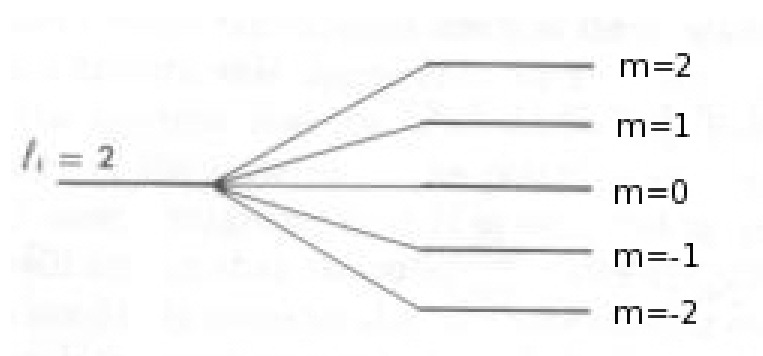
Hogyan tudjuk megérteni ennek hatását komolyabb fizika nélkül? A szimmetria segít!!

Tegyük fel, hogy a tér z irányú, azaz a z tengely mentén hat. Ez elrontja a rendszer szimmetriáját, H-atom és mágneses tér együtt már nem gömbszimmetrikus. Ebből következik, hogy a fenti táblázatban összefoglalt degeneráltságnak is meg kell szűnnie! Ez az ún. *Zeeman-effektus*.

Pl. a $2p_1, 2p_0, 2p_{-1}$ pályák (l kvantumszám értéke 1) energiája felhasad, három különböző értéket mutat. Sematikusan:



Másik példa: a $3d_2, 3d_1, 3d_0, 3d_{-1}, 3d_{-2}$ pályák (l kvantumszám értéke 2) energiája felhasad, öt különböző értéket mutat. Sematikusan:

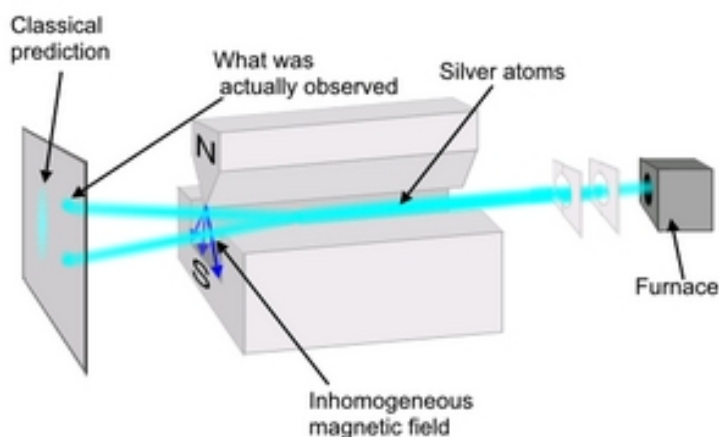


Megállapíthatjuk tehát, hogy a Zeeman-effektus hatására a H-atom energiaszintjei $2l + 1$ szintre hasadnak fel.

2.5.4. Az elektronspin

A Zeeman-effektus kimutatható, ha H-atomokat inhomogén mágneses téren bocsátunk keresztül, hiszen m értékének függvényében a nyaláb $2l + 1$ nyalábra kell felhasadjon. Azaz 1, 3, 5, 7, stb. számú nyalábot várunk, attól függően, hogy milyen l állapotú H-atomokkal végezzük a kísérletet.

Stern és Gerlach azonban azt tapasztalta, hogy a nyaláb *két* részre válik szét:



(Stern és Gerlach a kísérletet ezüst atomokkal végezte!!! A jelenség ugyanaz, hiszen a külső héjon akkor is egy elektron van.)

A kísérlet az eddigiek alapján nem értelmezhető, hiszen $2l + 1 \neq 2$, ha l egész!!!

Következtetés:

- Pauli (1925): „negyedik kvantumszám kell”;
- Goudsmit és Uhlenbeck (hollandok) javasolták konkrétan a *spin*-t.

Az új kvantumszám(ok) tartoznak ehhez a mozgásformához:

$$s = ? \quad (41)$$

$$m_s = -s, -s + 1, \dots, s \quad (42)$$

Mekkorák lehetnek a kvantumszámok? A kísérlet alapján határozzuk meg: a Stern-Gerlach kísérletben két vonalat figyeltünk meg, azaz m_s két értéke lehetséges:

$$m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad (43)$$

Ebből következik, hogy

$$s = \frac{1}{2} \quad (44)$$

Az elektronnak, mint részecskének a töltésen kívül elválaszthatatlan tulajdonsága a spin! Az elektron töltése -1 , a spinje $\frac{1}{2}$!!!!

El tudjuk ezt képzelni? Klasszikusan: ha az elektron egy nem pontszerű részecske, akkor tengelye körül foroghat jobbra, illetve balra.

Kvantumosan: nyilván a szétkent elektron így nem foroghat, de a „klasszikus” forgáshoz analóg jelenségnek is van mágneses hatása, ami mérhető.

Mivel m_s két értéket vehet fel, két spinállapot lehetséges. Az ehhez tartozó állapotok („spinfüggvény”) a következő képpen jelölhető (σ a spinváltozó):

$$m_s = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha(\sigma)$$

$$m_s = -\frac{1}{2} \rightarrow \beta(\sigma)$$

Az elektron teljes hullámfüggvénye tehát kiegészítendő a spinnel, azaz négy koordinátától függ:

$$\Psi(x, y, z, \sigma) = u(x, y, z) \alpha(\sigma) \quad (45)$$

$$\text{vagy} = u(x, y, z) \beta(\sigma) \quad (46)$$

2.5.5. A H-atom állapotai még egyszer

Hullámfüggvény:

$$\Psi_{n,l,m,m_s} \quad (47)$$

A kvantumszámok:

$$n = 1, 2, \dots \quad (48)$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (49)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l \quad (50)$$

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (51)$$

Az energia továbbra is csak az n kvantumszámtól függ:

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} [E_h] \quad (52)$$

azaz a degeneráció $2n^2$ -szeres!!!

2.5.6. Spin-pálya kölcsönhatás

Kétféle mágnesességet okozó periódikus mozgásunk van tehát:

- az elektron mozgásából származó, pályához rendelhető;
- spinből származó.

Ezek a mágneses terek ugyanúgy kölcsönhatnak egymással, mint a külső mágneses térrel. Ezt hívjuk *spin-pálya kölcsönhatás*-nak.

Következmény:

- az energia függeni fog az l kvantumszámtól akkor is, ha nincs külső mágneses tér.

Az effektus nagyon kicsi, $10^{-4} - 10^{-5}$ hartree nagyságrendű, azonban pontos spektroszkópai módszerrel kimutatható. Más atomok esetében ennél jelentősebb is lehet!

3. Atomok elektronszerkezete

3.1. Hamilton-operátor

A Hamilton-operátor atomi egységben

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_i^{\text{elektronok}} \Delta_i}_{\text{elektronok kinetikus energiája}} - \underbrace{\sum_i^{\text{elektronok}} \frac{Z_A}{r_{iA}}}_{\text{elektron-atommag vonzás}} + \underbrace{\sum_i^{\text{elektronok}} \sum_{j<i}^{\text{elektronok}} \frac{1}{r_{ij}}}_{\text{elektron-elektron taszítás}}$$

ahol

- Δ_i az i -edik elektron Laplace-operátora
- Z_A az atommag töltése
- r_{ij} az i -edik és j -edik elektronok távolsága
- r_{iA} az i -edik elektron és az atommag távolsága

3.2. A többelektronos hullámfüggvény

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi(x_1, y_1, z_1, \sigma_1, x_2, y_2, z_2, \sigma_2, \dots, x_n, y_n, z_n, \sigma_n) \\ &\equiv \Psi(1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

azaz egy $4n$ változós függvény.

3.3. A Schrödinger-egyenlet

$$\hat{H}\Psi(1, 2, \dots, n) = E\Psi(1, 2, \dots, n) \quad (53)$$

Probléma: a Hamilton operátor nem írható fel összeg alakban ($\sum_i$), ezért a hullámfüggvény sem lesz szorzat alakú:

- nem oldható meg egzakt módon
- *nem lesz szemléletes*

3.4. A hullámfüggvény közelítése szorzat alakú hullámfüggvénnyel

Fizikai jelentés:

- Független részecske közelítés, vagy
- Független Elektron Modell (FEM)

a) ha nem lenne elektron-elektron kölcsönhatás:

$$\hat{H} = \sum_i h_i(i) \Rightarrow \underbrace{\Psi(1, 2, \dots, n)}_{\text{hullámfüggvény}} = \underbrace{\phi_1(1) \cdot \phi_2(2) \dots \cdot \phi_n(n)}_{\text{spinpályák szorzata}} \quad (54)$$

Spinpálya:

$$\begin{aligned} \phi_i(i) = \phi_i(x_i, y_i, z_i, \sigma_i) &= u(x_i, y_i, z_i) \alpha(\sigma_i) \\ \text{vagy} &= \underbrace{u(x_i, y_i, z_i)}_{\text{térbeli pálya}} \beta(\sigma_i) \end{aligned}$$

Ebben az esetben a Schrödinger-egyenlet szétesik egyelektron-egyenletekre:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \Rightarrow \hat{h}_1(1)\phi_1(1) = \varepsilon_1\phi_1(1) \quad (55)$$

$$\hat{h}_2(2)\phi_2(2) = \varepsilon_2\phi_2(2) \quad (56)$$

$$\dots$$

$$\hat{h}_n(n)\phi_n(n) = \varepsilon_n\phi_n(n) \quad (57)$$

Egy darab n-elektronos egyenlet $\Rightarrow$ n db egyelektronos egyenlet

Teljes energia: $E = \sum_i \varepsilon_i$

Mi a $\hat{h}_i$?

$$\hat{h}_i = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{Z_A}{r_{iA}} \quad (58)$$

amely hasonlít a H-atom Hamilton-operátorára $\Rightarrow$ megoldásként hidrogén szerű függvényeket kapunk.

Gond: elektron-elektron kölcsönhatás hiányzik!!!!

b) *Hartree-módszer*:

Tekintsük az első elektron egyenletét, és a kölcsönhatásba vegyük be a többi elektronnal való kölcsönhatást:

$$\hat{h}_1 \rightarrow \hat{h}_1^{eff} = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{Z_A}{r_{iA}} + V_1^{eff} \quad (59)$$

ahol V_1^{eff} a kiszemelt elektron kölcsönhatása az összes többi elektronnal.

Az első elektron energiája (ε_1) és pályája ($\phi_1(1)$) megkapható, ha megoldjuk:

$$\hat{h}_1^{eff} \phi_1(1) = \varepsilon_1 \phi_1(1) \quad (60)$$

A második elektronra hasonlóan:

$$\hat{h}_2 \rightarrow \hat{h}_2^{eff} = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{Z_A}{r_{iA}} + V_2^{eff} \quad (61)$$

Végül az n -edik elektronra:

$$\hat{h}_n \rightarrow \hat{h}_n^{eff} = -\frac{1}{2}\Delta_n - \frac{Z_A}{r_{iA}} + V_n^{eff} \quad (62)$$

A csatolt egyenletek iteratív megoldásából kaphatók meg a pályák és a pályaenergiák!!! Az egyenletek azért csatoltak, mert a V_i^{eff} potenciálhoz ismernünk kell a többi elektron helyét, azaz a pályáját!

Teljes energia: $E \neq \sum_i \varepsilon_i$, mert különben az elektron-elektron kölcsönhatást kétszer számítanánk! Hanem

$$E = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$$

várható értéként kell kiszámítani.

3.5. Pauli-elv és a Slater-determináns

Kvantummechanikai elv: azonos részecskék megkülönböztethetetlenek. Ezért két részecske felcserélést okozó operátor ($\hat{P}_{12}$) hatására a hullámfüggvény vagy nem változik, vagy előjelet vált:

$$\hat{P}_{12}\Psi(1, 2, \dots, n) = \pm\Psi(1, 2, \dots, n) \quad (63)$$

Az előjel változása azért megengedett, mert fizikai jelentése csak a hullámfüggvény négyzetének van.

A kvantummechanika egyik posztulátuma szerint (Pauli-elv) az elektronok hullámfüggvénye antiszimmetrikus a részecskék felcserélésére. Tehát elektronok esetén:

$$\hat{P}_{12}\Psi(1, 2, \dots, n) = -\Psi(1, 2, \dots, n) \quad (64)$$

A szorzat hullámfüggvény nem teljesíti az antiszimmetria kritériumát. Ezért a szorzat helyett determináns hullámfüggvényt kell használnunk:

$$\Psi(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \cdots & \phi_n(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) & \cdots & \phi_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(n) & \phi_2(n) & \cdots & \phi_n(n) \end{vmatrix} \quad (65)$$

Az ilyen típusú hullámfüggvényt *Slater-determinánsnak* nevezzük.

A determináns tulajdonságaiból:

- A determináns két sorát felcserélve a determináns előjelet vált $\rightarrow$ két elektront felcserélve a hullámfüggvény előjelet vált.
- Ha a determináns két oszlopa egyenlő, a determináns értéke 0 $\rightarrow$ ha két elektron van ugyanazon a pályán, a hullámfüggvény eltűnik
- Ha a determináns egy sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik konstansszorosát, a determináns értéke nem változik $\rightarrow$ a pályák bármely lineárkombinációját használhatjuk, a hullámfüggvény nem változik.

Következtetések:

- és b) Pauli-elv automatikusan teljesül
- pályáknak nincs fizikai jelentése, csak a térnek, amelyet kifeszítenek!

Hartree-Fock-módszer

A FEM legpontosabb módszere: tulajdonképpen ugyanaz, mint a Hartree, csak most szorzat hullámfüggvény helyett determináns hullámfüggvényt használunk.

A pályákat az ún. Hartree-Fock-egyenletek megoldásával kapjuk:

$$\hat{f}(i)\phi_i(i) = \varepsilon_i\phi_i(i) \quad i = 1, \dots, n \quad (66)$$

ahol az ún. Fock-operátor

$$\hat{f}(i) = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{Z_A}{r_{iA}} + U^{HF} \quad (67)$$

U^{HF} átlagos elektron-elektron taszítási potenciál. Vegyük észre, hogy míg a Hartree-módszerben $\hat{h}_i^{eff}$ a különböző részecskékre különbözött, itt a Fock-operátor minden elektronra egyforma, hiszen a részecskék megkülönböztethetetlenek!

3.6. Atomok elektronszerkezete a FEM keretében

3.6.1. Energia, pálya, hullámfüggvény

A fentiek alapján megoldjuk a FEM (Hartree-, vagy Hartree-Fock) egyenleteket, abból a célból, hogy meghatározzuk a pályákat és a hozzájuk tartozó pályaenergiákat. Az egyenletek alakja:

$$\hat{h}(i)\phi_i = \varepsilon_i\phi_i \quad (68)$$

$$\hat{h}(i) = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{1}{r} + V \quad (69)$$

ahol V az elektron-elektron taszítási potenciál (l. fentebb a Hartree- illetve a Hartree-Fock-módszerek tárgyalását; a további kvalitatív tárgyalás szempontjából nem lényeges, hogy melyiket használtuk).

Megoldásként megkapjuk:

- ϕ_i pályákat
- ε_i pályaenergiákat

Mivel $\hat{h}$ hasonlít a H-atom Hamilton-operátorára, hasonló megoldást kapunk:

$$\phi_i(r, \vartheta, \varphi) = R_i(r)Y_i(\vartheta, \varphi) \quad (70)$$

Segítségül hívhatjuk a szimmetriát. Az atomok pontcsoportja O_3^+ , azonos a H-atommal, azaz lehetséges irrepek $S, P, D, \dots$, tehát a megoldásfüggvények $S, P, D, \dots$ irrepek egyikéhez fognak tartozni.

Az O_3^+ pontcsoport karaktertáblájának lényeges részlete:

O_3^+	$\hat{E}$	...
S	1	...
P	3	...
D	5	...
F	7	...
...	...	...

tehát lesznek S jelű egydimenziós reprezentációk (nem degenerált pályák), P jelű háromdimenziós reprezentációk (háromszorosan degenerált pályák), D jelű öt dimenziós reprezentációk (ötszörösen degenerált pályák), stb. Pontosan úgy, mint a H-atom pályái esetén.

Szögfüggő rész: a szimmetria miatt u.a. mint H-atom, azaz $Y^{l,m}(\vartheta, \varphi)$. A szimmetria alapján a pályákat szintén megadhatjuk, mint $1s, 2s, 2p_0, 2p_1, 2p_{-1}$, stb.

Radiális rész: $R^{n,l}(r)$ más lesz, mint H-atom esetén, hiszen a potenciál más (van elektron-elektron kölcsönhatás is). Egyrészt Z_A miatt gyorsabban cseng le, másrészt az elektron-elektron kölcsönhatás miatt pl. az $2s$ és $2p$ pályák energiája már nem lesz azonos, pályaenergia függ az n és az l kvantumszámoktól is ($\varepsilon = \varepsilon_{nl}$). Ez azzal magyarázható, hogy a különböző alakú pályákra nyilván másként hat a többi elektron tere.

Hullámfüggvény: a betöltött pályákból szorzat, illetve determináns hullámfüggvényt képzünk; a pályákat növekvő pályaeenergia szerint töltjük be (*Aufbau-elv*).

Néhány fontos fogalom:

- *Héj*: azonos n kvantumszámú pályák halmaza
- *Alhéj*: azonos n és l kvantumszámú pályák halmaza, melyek energiája a fentiek alapján azonos (degeneráltak). $1s$ és $2s$ önmagukban képeznek alhéjat, míg a $2p_0$, $2p_1$ és $2p_{-1}$ (vagy $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$) pályák alkotják a $2p$ alhéjat. A $3d$ alhéjnak öt komponense van, a $4f$ -nek hét, stb.
- *Konfiguráció*: megadja, hogy az egyes alhéjakon hány elektron van. Példák:
He: $1s^2$
C: $1s^2 2s^2 2p^2$

3.6.2. Az atom állapotának megszerkesztése

Mivel a pályáknál nagyfokú a degeneráció, legtöbbször nyílt héjú rendszerrel van dolgunk. Ekkor a konfiguráció nem egyenlő az állapottal, egy konfigurációhoz több állapot is tartozhat.

Példa: C atom

Konfiguráció: $1s^2 2s^2 2p^2$

$2p$ nyílt héj, hiszen csak két elektron van a lehetséges hat helyre:

Három térbeli pálya: $2p_0$, $2p_1$, $2p_{-1}$, ehhez két-két spin (α , β) társulhat. Azaz, összesen hat különböző spinpálya van ($2p_0\alpha$, $2p_0\beta$, $2p_1\alpha$, $2p_1\beta$, $2p_{-1}\alpha$, $2p_{-1}\beta$), amelyből $\binom{6}{2} = 15$ féle képpen lehet a két betöltöttet kiválasztani. Ez azt jelenti, hogy 15 különböző állapot tudunk szerkesztteni.

A feladatunk tehát a lehetséges 15 állapotot megszerkesztése, de legalább is ezek jellemzése.

Ismét csak a szimmetriát hívhatjuk segítségül, ugyanis tudjuk, hogy az állapotokat az O_3^+ pontcsoport irreprejjei szerint lehet besorolni.

Hogyan adható meg annak a kételektronos állapotnak a szimmetriája, ahol mindkét elektron P szimmetriájú pályán van? Ehhez a direktszorzat fogalmát kell segítségül hívni: a megfelelő szimmetriák (jelen esetben P) direktszorzatával kaphatjuk meg a kételektronos rendszer szimmetriáját. A tanultak szerint két háromdimenziós reprezentáció direktszorzata $3 \cdot 3 = 9$ dimenziós reprezentáció, mely azonban reducibilis, és a következő módon bontható fel irreprekre:

$$P \otimes P = S \oplus P \oplus D \quad (71)$$

Ezek szerint a szimmetria oldaláról három különböző állapot lehetséges: S , P és D .

A jellemzéshez használjuk még a két elektron együttes spinjét, ami lehet szinglett ha a két spin ellentétes, illetve tripllett, ha azonosak.

A háromféle térbeli és kétféle spin eset összesen 6 esetet eredményez.

Az állapot teljes jelölésben a szimmetria jelét használjuk, a multiplicitást pedig első/felső indexben tesszük.

A multiplicitás a spinállapotok degeneráltságát jelent: szinglett esetén 1 (nem degenerált), triplett esetén 3 (háromszorosan degenerált).

A C-atom lehetséges állapotai tehát:

$$\begin{aligned} \text{szinglett} : & \quad {}^1S \quad {}^1P \quad {}^1D \\ \text{triplett} : & \quad {}^3S \quad {}^3P \quad {}^3D \end{aligned}$$

Degeneráltságot figyelembe véve: 1S egyszer egy, 1P egyszer három, 1D egyszer öt, 3S háromszor egy, 3P háromszor három, 3D háromszor öt komponensből áll, összesen 36 állapot!!! Ez több, mint a 15, amit az első okfejtésből kaptunk!!!!

Amit nem vettünk figyelembe: *Pauli elv*, mely szerint a két elektron nem lehet ugyanabban az állapotban.

Ha ezt is figyelembe vesszük, akkor a lehetséges állapotok a következők:

$${}^1S \quad {}^3P \quad {}^1D$$

Ez pontosan 15 állapotot jelent, tehát most már rendben vagyunk!

Összefoglalva: a C atom $2p^2$ konfigurációjában három energiaszint van.

Mi az energiasorrend?

Hund-szabály (tapasztalati: „Nun, einfach durch Anstieren der Spektren”):

- maximális multiplicitású a legalacsonyabb energiájú (ellentétes spin esetén nincs kicserélődés, ami a Pauli-elvből következő vonzó kölcsönhatás két azonos spinű részecske között);
- azonos multiplicitás esetén a nagyobb degeneráltságú állapot energiája alacsonyabb.

Azaz a C atomra:

$$E_{3P} < E_{1D} < E_{1S} \quad (72)$$

3.6.3. További konfigurációk:

p^1	illetve	p^5	2P	B, F
p^2	illetve	p^4	${}^3P, {}^1D, {}^1S$	C, O
p^3			${}^4S, {}^2D, {}^2P$	N
p^6	(zárt héj)		1S	Ne

Azért szerepel p^n és p^{6-n} együtt mert n elektrontól vagy n üres helyből ugyanolyan és ugyanannyi állapot építhető.

4. Molekulák elektronszerkezete

4.1. A magok és elektronok mozgásának szétválasztása

A *Hamilton-operátor*

Új az atomokhoz képest: az elektronok több atom terében mozognak → alacsonyabb szimmetria

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{T}_{el}(\underline{r}) + \hat{V}_{el-mag}(\underline{r}, \underline{R}) + \hat{V}_{el-el}(\underline{r}) + \hat{V}_{mag-mag}(\underline{R})}_{\hat{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{R})} + \underbrace{\hat{T}_{mag}(\underline{R})}_{\hat{T}_n(\mathbf{R})}$$

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \hat{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + \hat{T}_n(\mathbf{R}) \quad (73)$$

ahol

- $\mathbf{r}$ az elektronok koordinátáit jelöli
- $\mathbf{R}$ az atommagok koordinátáit jelöli
- l. korábbi jelöléseket is

Az elektronok és a magok koordinátái nem szeparálódtak!!!!

A *Born-Oppenheimer-közelítés*

az elektronok sokkal könnyebbek, mint a magok ($\frac{M}{m_{el}} \approx 1836$)

↓ ekvipartíció

az elektronok sokkal gyorsabbak

↓

az elektronok azonnal követik a magokat (adiabatikus közelítés)

↓

az elektronok szempontjából a magok mozdulatlanok

↓

Elektronprobléma egyenlete: $\hat{H}_e(\mathbf{r}; \mathbf{R})\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{R}) = E(\mathbf{R})\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{R})$

Magokra: $(\hat{T}_n(\mathbf{R}) + E(\mathbf{R}))\chi(\mathbf{R}) = E_{TOT}\chi(\mathbf{R})$

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

Megjegyzések:

- a *Born-Oppenheimer* (BO)-közelítésben a magokra és az elektronokra vonatkozó egyenletek szeparálódnak;
- a magok *nem* mozdulatlanok;
- a magokra ható potenciál $E(\mathbf{R})$, az elektronok Schrödinger-egyenletének különböző magtávolságoknál vett energiája (sajátértéke);
- $E(\mathbf{R})$ potenciálfelület tehát a *Born-Oppenheimer*-közelítés következménye, enélkül a potenciál (potenciálgörbe, potenciálfelület, PES) nem értelmezhető;
- általában nagyon jó közelítés, de összeomlik, ha a különböző elektronállapotok energiája közel esik (pl. fotokémia).

Mostantól az első egyenlettel foglalkozunk, míg a félév második felében a magmozgás egyenlete (második egyenlet) kerül előtérbe; az e indexet elhagyjuk, $\hat{H}$ az elektronok Hamilton-operátorát jelöli.

4.2. A H_2^+ molekulaion

Analitikusan már ez sem oldható meg, ún. háromtest-probléma.

De, a BO-t használva egyelektron-probléma:

A Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} + \frac{1}{R} \quad (74)$$

ahol r_{1A} és r_{1B} az elektron az egyik, illetve a másik magtól való távolság, R a két mag távolsága.

A Schrödinger-egyenlet:

$$\hat{H}\Phi_i(1; R) = E_i(R)\Phi(1; R) \quad (75)$$

Analitikus megoldás lehetséges elliptikus koordinátákban. Nem oldjuk meg, a megoldást csak kvalitatívan elemezzük.

A molekula szimmetriája: $D_{\infty h}$.

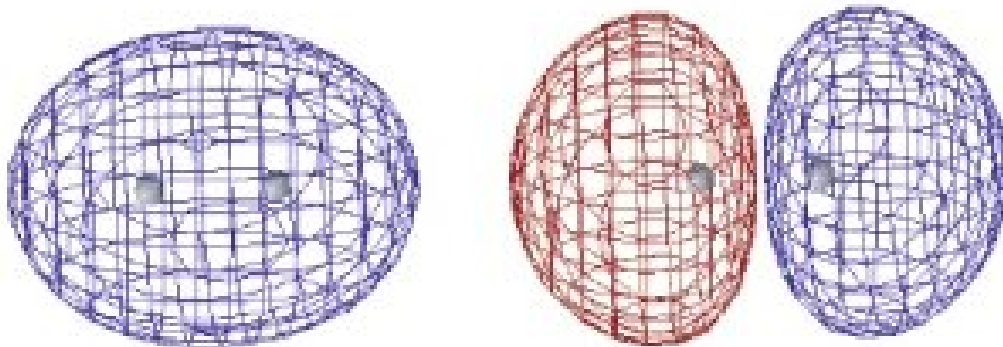
Kötéshossz: 2.00 bohr, disszociációs energia: 2.8 eV

A $D_{\infty h}$ pontcsoport karaktertáblája:

Character table for point group $D_{\infty h}$

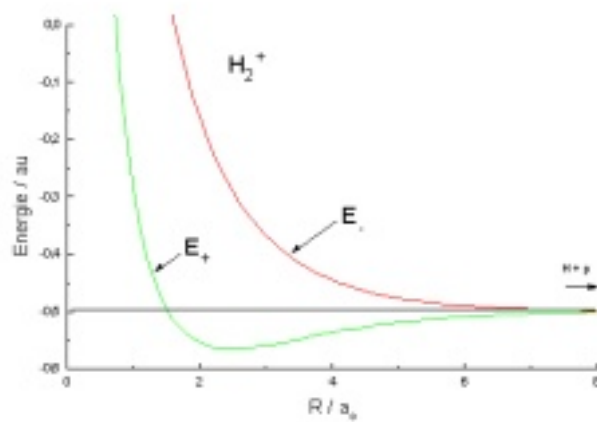
$D_{\infty h}$	E	$2C_{\infty}$	...	$\sigma \sigma_v$	i	$2S_{\infty}$	...	σC_2	linear functions, rotations	quadratic functions	cubic functions
$A_{1g} = \Sigma_g^+$	+1	+1	...	+1	+1	+1	...	+1	-	x^2+y^2, z^2	-
$A_{2g} = \Sigma_g^-$	+1	+1	...	-1	+1	+1	...	-1	R_z	-	-
$E_{1g} = \Pi_g$	+2	$+2\cos(\phi)$	...	0	+2	$-2\cos(\phi)$	...	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)	-
$E_{2g} = \Delta_g$	+2	$+2\cos(2\phi)$	...	0	+2	$+2\cos(2\phi)$	...	0	-	(x^2-y^2, xy)	-
$E_{3g} = \Phi_g$	+2	$+2\cos(3\phi)$	...	0	+2	$-2\cos(3\phi)$	...	0	-	-	-
E_{ng}	+2	$+2\cos(n\phi)$	...	0	+2	$(-1)^n 2\cos(n\phi)$	...	0	-	-	-
...	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-	-
$A_{1u} = \Sigma_u^+$	+1	+1	...	+1	-1	-1	...	-1	z	-	$z^3, z(x^2+y^2)$
$A_{2u} = \Sigma_u^-$	+1	+1	...	-1	-1	-1	...	+1	-	-	-
$E_{1u} = \Pi_u$	+2	$+2\cos(\phi)$	...	0	-2	$+2\cos(\phi)$	...	0	(x, y)	-	$(xz^2, yz^2) [x(x^2+y^2), y(x^2+y^2)]$
$E_{2u} = \Delta_u$	+2	$+2\cos(2\phi)$	...	0	-2	$-2\cos(2\phi)$	...	0	-	-	$[xyz, z(x^2-y^2)]$
$E_{3u} = \Phi_u$	+2	$+2\cos(3\phi)$	...	0	-2	$2\cos(3\phi)$	...	0	-	-	$[y(3x^2-y^2), x(x^2-3y^2)]$
E_{nu}	+2	$+2\cos(n\phi)$	...	0	-2	$(-1)^{n+1} 2\cos(n\phi)$	...	0	-	-	-
...	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-	-

Megoldások ($\Phi_i(1; R)$): a rendszer hullámfüggvénye, most pálya is, hiszen egy elektron van



Φ_1 szimmetria: Σ_g^+

Φ_2 szimmetria Σ_u^+



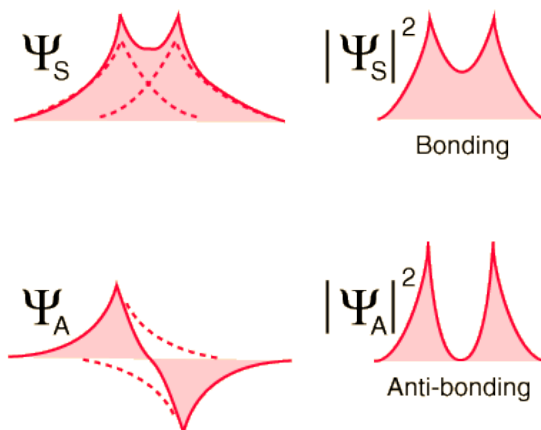
H2_Ion_Energien.gif

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

Alapvető kérdés: mi a kémiai kötés?

Válasz az ábra alapján:

- a potenciálgörbe alapján: energiacsökkenés, ha a két atom közelít;
- pálya alakjából: elektronsűrűség növekedése a két atom között.



Ennél többet nem igazán lehet mondani, de l. később a Lewis-szerkezetek értelmezését!

4.3. Az LCAO-MO közelítés

A σ_g és a σ_u pályákat bonyolult függvények adják meg. Tudunk-e valami egyszerűbbet?

A molekulákat úgy képzeljük el, mintha az atomok közelítenének egymáshoz. Ebben az értelemben a két H-atom alapállapotú pályája ($1s$) közelít egymáshoz. Ezért:

$$\sigma_g = 1s_A + 1s_B \quad (76)$$

$$\sigma_u = 1s_A - 1s_B \quad (77)$$

Ez „ránézésre” is látszik. Van-e elméleti magyarázat?

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{r_{1A}}}_{\text{H-atom az A helyen}} - \underbrace{\frac{1}{r_{1B}}}_{\text{A helyen 0}} + \underbrace{\frac{1}{R}}_{\text{konstans}} \quad (78)$$

Tehát a Hamilton-operátor az A helyen jó közelítéssel egy H-atom Hamilton-operátora, és ugyanígy B helyen is. Ezért a hullámfüggvény (pálya) jó közelítéssel megadható az $1s_A$ és $1s_B$ függvények lineáris kombinációjaként.

Általánosan: *Linear Combination of Atomic Orbitals for Molecular Orbitals* (LCAO-MO) elmélet, amelynek keretében a molekulapályákat atomi pályák lineáris kombinációjaként keressük:

$$\phi_i = \sum_r c_{ir} \chi_r \quad (79)$$

ahol χ_r az atompályákat jelöli. Matematikailag: a molekulapályákat sorba fejtjük atompályák (bázisfüggvények!!) lineáris kombinációjaként, c_{ir} a sorfejtési együttható.

Hány függvény kell?

- egzakt sorfejtéshez végtelen sok;
- a fentiek alapján az AO-k nagyon jók, belőlük kevés is elég;
- legalább annyi, ahány betöltött pálya van az atomban (ún. minimális bázis).

Példa: H_2^+ -molekulaion, minimális bázis.

Bázis: $\chi_1 = 1s_A$ $\chi_2 = 1s_B$

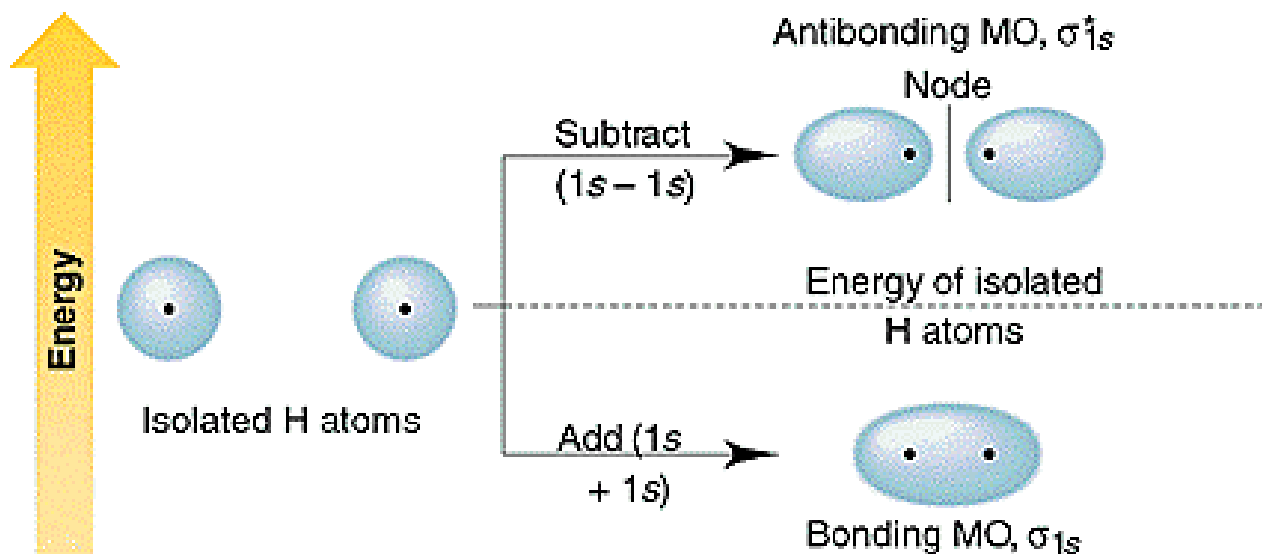
A hullámfüggvényt tehát a következő alakban keressük:

$$\phi_1 = c_{11} 1s_A + c_{12} 1s_B \quad (80)$$

$$\phi_2 = c_{21} 1s_A + c_{22} 1s_B \quad (81)$$

koefficiensek meghatározása: az energia minimalizálása, az ún. variációs módszer alapján.
Eredmény:

Hullámfüggvény (jelen esetben pálya):

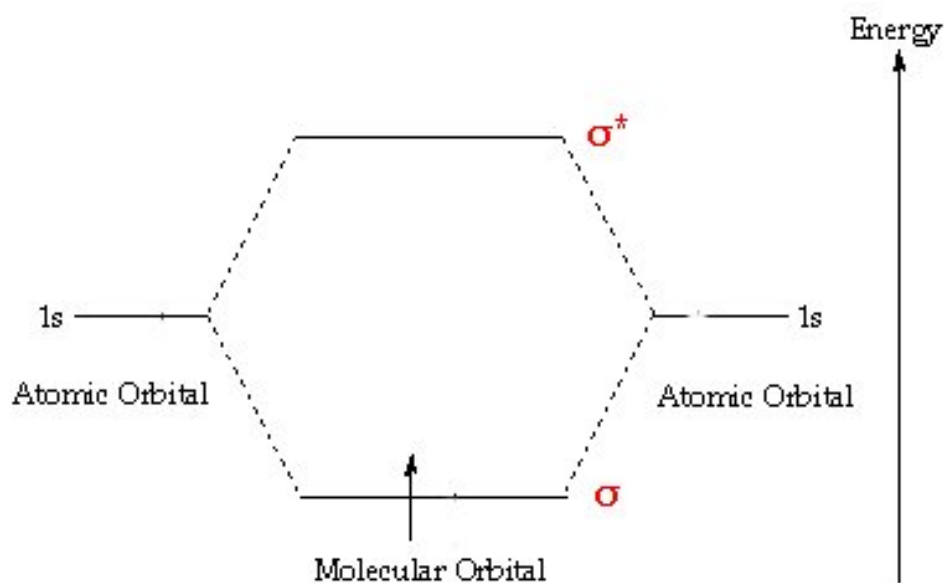


$$\phi_1 = N_1(1s_A + 1s_B) \quad (82)$$

$$\phi_2 = N_2(1s_A - 1s_B) \quad (83)$$

N_1 és N_2 normálási tényezők.

Energia: Pályadiagramm ábra:



Ebből a számításból $R_e \approx 2.5$ bohr. Mennyire jó ez az eredmény?

Kvalitatív célokra mindenképpen, de biztató, hogy ilyen kevés függvénnnyel már jól működik.

4.4. A hidrogénmolekula elektronszerkezete

A hidrogénmolekula leírása az MO elmélet keretében

A Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_i \Delta_i - \sum_i \sum_A \frac{1}{r_{iA}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R} \quad (84)$$

ahol r_{iA} az elektron és az A atommag távolsága, R a két mag távolsága, r_{12} az elektronok távolsága.

Hasonlóan járunk el az atomok tárgyalásához: FEM keretében

Hullámfüggvény: determináns:

$$\Psi_{MO} = \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) \end{vmatrix}$$

Honnan vegyük az MO-kat a kvalitatív leíráshoz? Az atomok esetében H-atomból vettük, itt a H_2^+ a megfelelő egyelektronos rendszer:

$$\phi_1 = \sigma_g \alpha \quad \phi_2 = \sigma_g \beta \quad (85)$$

ahol σ_g a H_2^+ kötőpályája ($\sigma_g = N_1(1s_A + 1s_B)$).

Konfiguráció: σ_g^2

Állapot: $^1\Sigma_g^+$ $\Sigma_g^+ \otimes \Sigma_g^+ = \Sigma_g^+$

(Az állapotot a teljes hullámfüggvény szimmetriájával jellemezzük, első felső indexbe itt is a multiplicitás kerül.)

A determinánst kifejtve:

$$\Psi_{MO} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(1)\phi_2(2) - \phi_1(2)\phi_2(1)) \quad (86)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_g \alpha(1)\sigma_g \beta(2) - \sigma_g \alpha(2)\sigma_g \beta(1)) \quad (87)$$

$$= \underbrace{\sigma_g(1)\sigma_g(2)}_{\text{térbeli rész}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1))}_{\text{szinglett spinfüggvény-determináns}} \quad (88)$$

A térbeli részbe a pálya sorfejtését beírva ($\sigma_g = N_1(1s_A + 1s_B)$):

$$\Psi_{MO}^{tér} = \sigma_g(1)\sigma_g(2) \quad (89)$$

$$= N_1^2(1s_A(1) + 1s_B(1))(1s_A(2) + 1s_B(2)) \quad (90)$$

$$= N_1^2 \underbrace{(1s_A(1)1s_A(2))}_{\text{ionos}} + \underbrace{(1s_A(1)1s_B(2) + 1s_B(1)1s_A(2))}_{\text{kovalens}} + \underbrace{(1s_B(1)1s_B(2))}_{\text{ionos}} \quad (91)$$

Gerjesztett állapot:

Konfiguráció: $\sigma_g^1 \sigma_u^1$

Állapot: $^3\Sigma_u^+$ ill. $^1\Sigma_u^+$

$$\Sigma_g^+ \otimes \Sigma_u^+ = \Sigma_u^+$$

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

A hidrogénmolekula leírása a Valence Bond (VB) elmélet keretében

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \underbrace{-\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{r_{1A}}}_{\hat{H}_a} - \underbrace{\frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{r_{2B}}}_{\hat{H}_b} - \underbrace{\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{1B}} + \frac{1}{r_{12}}}_{\hat{H}'} + H_0 \\ &= \hat{H}_a(1) + \hat{H}_b(2) + \hat{H}'(1,2)\end{aligned}$$

E felírás alapján a molekula a független atomokból plusz kölcsönhatásból ($\hat{H}'$; „perturbáció”) áll.

A hullámfüggvény nem kölcsönható atomok esetében:

$$f_1(1,2) = 1s_A(1)1s_B(2) \quad \text{vagy} \quad f_2(1,2) = 1s_A(2)1s_B(1)$$

Heitler-London hullámfüggvény (térbeli rész) a nem-kölcsönható rendszer két lehetséges függvényét használja a kölcsönható rendszerre (hiszen az elektronok megkülönböztethetetlenek):

$$\begin{aligned}\Phi_{HL}^{\text{terbeli}}(1,2) &= f_1(1,2) + f_2(1,2) \\ &= 1s_A(1)1s_B(2) + 1s_B(1)1s_A(2)\end{aligned}$$

(szimmetrikus térbeli függvényhez antiszimmetrikus spinfüggvényt választunk).

Összevetve az MO elméletben kapott hullámfüggvénnyel: csak kovalens rész, az ionos rész hiányzik!!!

Adjuk hozzá ionos függvényeket is:

$$\begin{aligned}f_3(1,2) &= 1s_A(1)1s_A(2) \\ f_4(1,2) &= 1s_B(1)1s_B(2)\end{aligned}$$

A teljes VB hullámfüggvény:

$$\begin{aligned}\Psi_{VB}^{\text{terbeli}} &= c_{HL}\Psi_{HL}^{\text{terbeli}} + c_{ion}(f_3 + f_4) \\ &= c_{HL}(1s_A(1)1s_B(2) + 1s_B(1)1s_A(2)) + c_{ion}(1s_A(1)1s_A(2) + 1s_B(1)1s_B(2))\end{aligned}$$

A koefficienseket variációsan lehet meghatározni. Vegyük észre, hogy ez jobb, mint MO, mert az ionos és a kovalens rész súly különböző is lehet.

Számításból:

- egyensúlyi kötéstávolságnál: $c_{HL} \approx c_{ion}$, tehát az MO elmélet itt jó közelítés
- nagy R -nél: $c_{HL} \rightarrow 1$, $c_{ion} \rightarrow 0$

4.5. Az A_2 típusú kétatomos molekulák elektronszerkezete

Leírás: FEM keretében MO (Molekulapálya) módszer.

Elv:

- molekulapályákat határozzunk meg, atompályák lineárkombinációjaként;
- ezeket pályae energiák sorrendjében töltjük be (Aufbau-elv).

Pályák:

- alakjukban hasonlítanak a H_2^+ pályáira;
- tükrözik a rendszer szimmetriáját ($D_{\infty h}$);
- a két atomon lévő atompályák („bázisfüggvények”) lineárkombinációi.

Szimmetria: $D_{\infty h}$

Pályák szimmetriája a $D_{\infty h}$ pontcsoport irreprei szerint:

irrep jele	dimenzió	megfelelő pálya jele
Σ_g^+	1	σ_g
Σ_u^+	1	σ_u
Π_g	2	π_g
Π_u	2	π_u
Δ_g	2	δ_g
Δ_u	2	δ_u
Σ_g^-	1	—
stb.		

Tehát lesznek nemdegenerált (σ_g , σ_u) és kétszeresen degenerált (π_u , π_g , stb.) pályák.

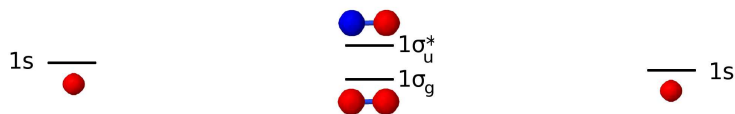
A második periódus esetén a bázisfüggvények:

$$1s_A, 1s_B, 2s_A, 2s_B, 2p_{A,x}, 2p_{A,y}, 2p_{A,z}, 2p_{B,x}, 2p_{B,y}, 2p_{B,z}$$

Az $1s$ pályákból tehát az $1\sigma_g$ kötő és az $1\sigma_u$ lazító pálya képezhető:

$$1\sigma_g = N_1 (1s_a + 1s_b)$$

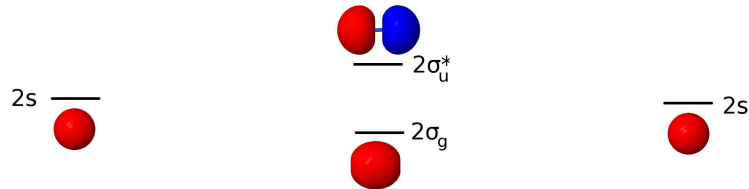
$$1\sigma_u = N_2 (1s_a - 1s_b)$$



A $2s$ pályákból a $2\sigma_g$ kötő és a $2\sigma_u$ lazító pálya képezhető:

$$2\sigma_g = N_3 (2s_a + 2s_b)$$

$$2\sigma_u = N_4 (2s_a - 2s_b)$$

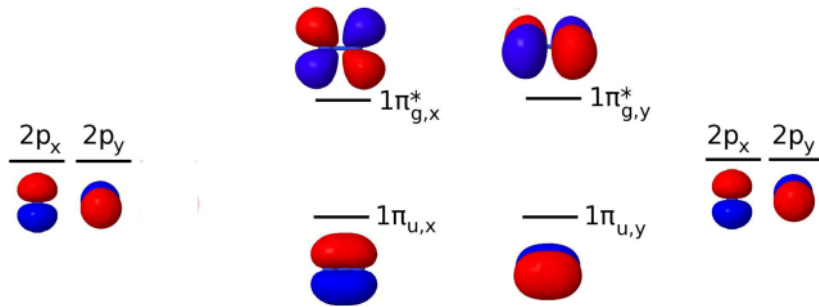


Ezek hasonlóan néznek ki, mint az $1\sigma_g$ és $1\sigma_u$, de, mint a $2s$ függvénynek, belül is van egy csomófelületük.

A $2p_x$ és $2p_y$ pályákból π_u kötő és π_g lazító pályák képezhetők:

$$1\pi_u(x) = N_6 (2p_{xa} + 2p_{xb}) \quad 1\pi_u(y) = N_6 (2p_{ya} + 2p_{yb})$$

$$1\pi_g(x) = N_8 (2p_{xa} - 2p_{xb}) \quad 1\pi_g(y) = N_8 (2p_{ya} - 2p_{yb})$$

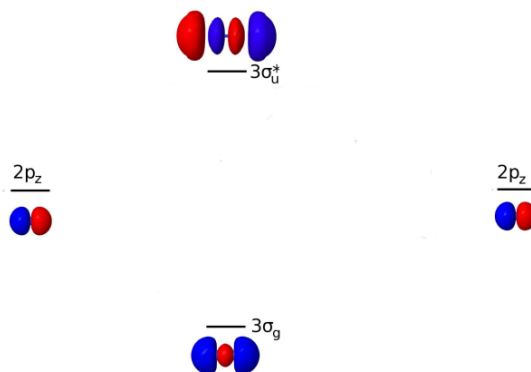


Ezek degenerált párok! Vegyük észre, hogy most az u jelűek a kötőpályák, és a g jelűek a lazítópályák!

A $2p_z$ pályákból ismét Σ szimmetriájú σ_g kötő és σ_u lazító pályák képezhetők:

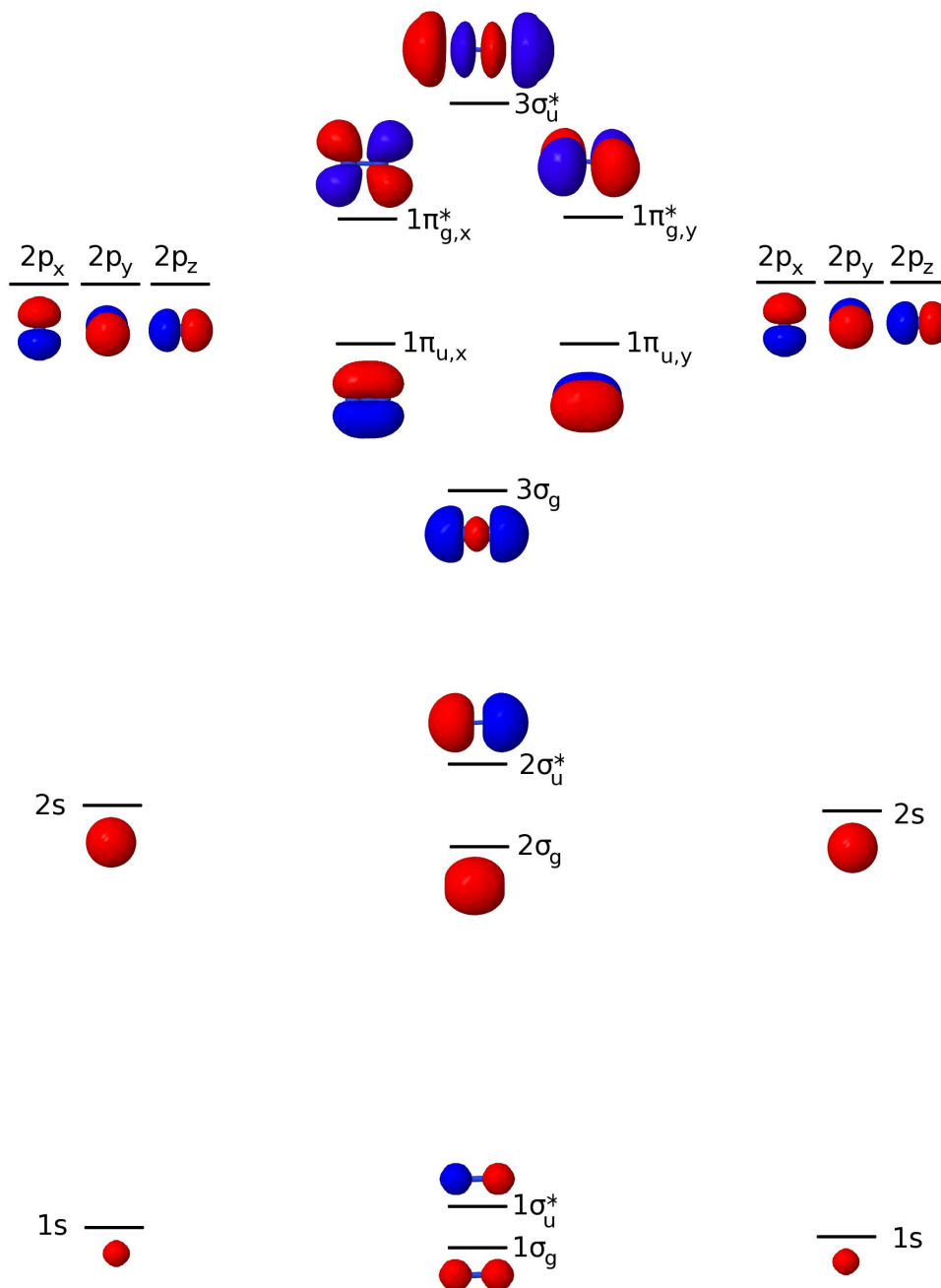
$$3\sigma_g = N_5 (2p_{za} - 2p_{zb})$$

$$3\sigma_u = N_7 (2p_{za} + 2p_{zb})$$

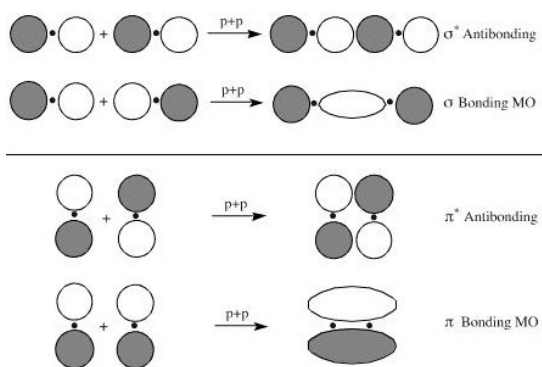


Itt pedig azt vegyük észre, hogy a kötő g jelű pálya minusz kombinációból készült, mert ekker fordul egymás felé a két p_z pálya.

A teljes energiadiagram a pályákkal:



Megfigyelhető, hogy a $3\sigma_g$ pálya mélyebb energiájú, mint a π_u pályák. Ennek oka, hogy az egymás felé fordult $2p_z$ pályáknak nagyobb az átfedése mind a párhuzamosan álló $2p_x$ (vagy $2p_y$) pároknak.



Ez alapján a pályák energia-sorrendje:

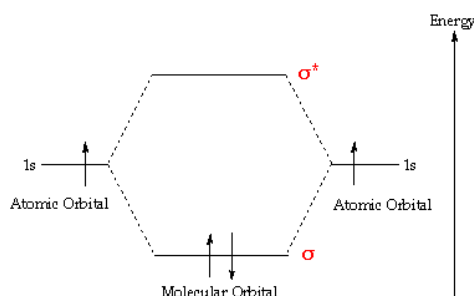
$$1\sigma_g, 1\sigma_u, 2\sigma_g, 2\sigma_u, 1\pi_u, 3\sigma_g, 1\pi_g, 3\sigma_u \dots$$

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

Az állapotok meghatározása

A pályákat az *Aufbau-elv* alapján töltjük be. Így kapjuk a *konfigurációt*. Az *állapotot* a hullámfüggvény szimmetriájával jellemezzük, melyet betöltött pályák szimmetriájának (irrepjeinek) ún. direktszorzataként határozhatjuk meg. *Multiplicitás* ellentétes spinű elektronpárok esetén szinglett, azonos spinű párok esetén tripllett. Az *állapot* jelét a szokott módon a multiplicitásból és a szimmetriából tesszük össze. *Kötésrendet* is meghatározhatunk a következő képlettel: (kötő pályán lévő elektronok száma – lazító pályán lévő elektronok száma) / 2

Pl. H_2 :



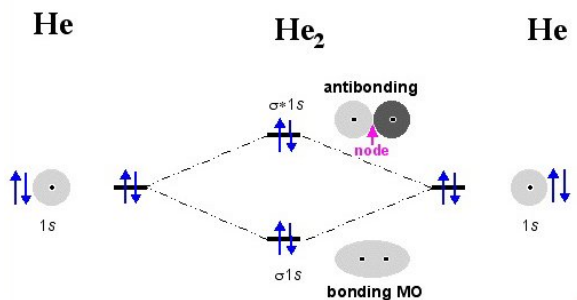
Konfiguráció: $1\sigma_g^2$

Állapot szimmetriája: $\Sigma_g^+ \otimes \Sigma_g^+ = \Sigma_g^+$

Állapot jele: $^1\Sigma_g^+$ (olvasd: szinglett szigma g plusz)

Kötésrend: 1, mert egy kötő pálya van betöltve két elektronnal.

Pl. He_2 :



Konfiguráció: $1\sigma_g^2 1\sigma_u^2$

Állapot szimmetriája: $\Sigma_g^+ \otimes \Sigma_g^+ \otimes \Sigma_u^+ \otimes \Sigma_u^+ = \Sigma_g^+$

Állapot jele: $^1\Sigma_g^+$

Kötésrend: 0, mert egy kötő és egy lazító pálya van betöltve két-két elektronnal.

Megállapíthatjuk, hogy kétszeresen betöltött pályák esetén a szimmetria mindig Σ_g^+ lesz (itt!! De más molekuláknál a megfelelő teljesen szimmetrikus irrepnek felel meg!). Elegendő tehát a nyílt héjakat (nem teljesen betöltött pályákat) figyelembe venni a szimmetria meghatározásakor.

Folytathatjuk ezt a többi kétatomos molekulára, de Li_2 és Be_2 esetén ugyanazt kapjuk, mint Ált. Kém.-ben.

Sajnos a modell a B_2 molekula esetén nem működik.

Melyik közelítéssel van baj?

- *MO elmélet*: rendben
- *LCAO-MO*: rendben
- *csak azonos atomi pályák keverése*: nem elég

Magyarázat: Valójában a lineárkombinációk képzésekor nem csak egy-egy pályapárt kell figyelembe venni, hanem az összes azonos szimmetriájú lehetőséget. Például:

$$\begin{aligned} 1\sigma_g &= c_{11}(1s_a + 1s_b) + c_{12}(2s_a + 2s_b) + c_{13}(2p_{za} + 2p_{zb}) + \dots \\ 2\sigma_g &= c_{21}(1s_a + 1s_b) + c_{22}(2s_a + 2s_b) + c_{23}(2p_{za} + 2p_{zb}) + \dots \\ 3\sigma_g &= c_{31}(1s_a + 1s_b) + c_{32}(2s_a + 2s_b) + c_{33}(2p_{za} + 2p_{zb}) + \dots \end{aligned}$$

Számításból azt kapjuk, hogy $1\sigma_g$ esetén:

$$c_{11} \approx 1, \quad c_{12} \approx c_{13} \approx 0$$

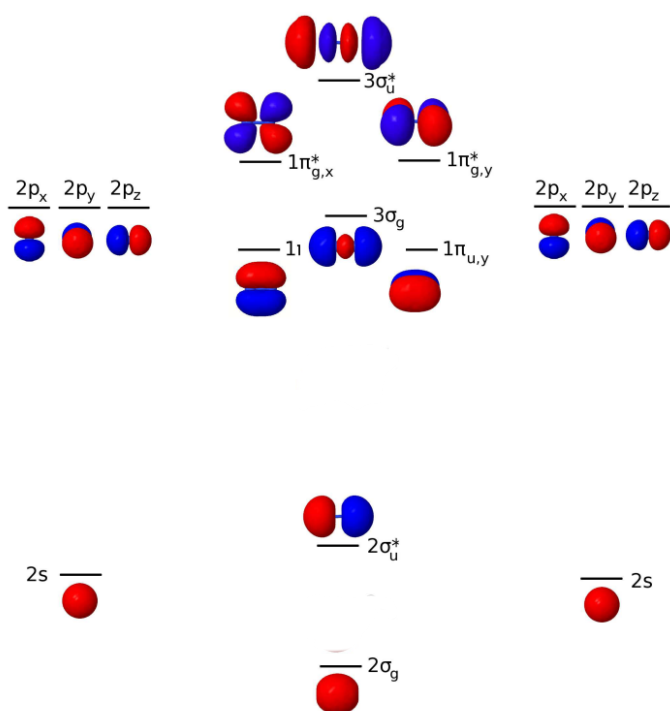
mert az $1s$ pálya energiája lényegesen alacsonyabb, mint a többié.

A $2s$ és $2p_z$ pályák viszont keverednek, hiszen ezek közel vannak energiában:

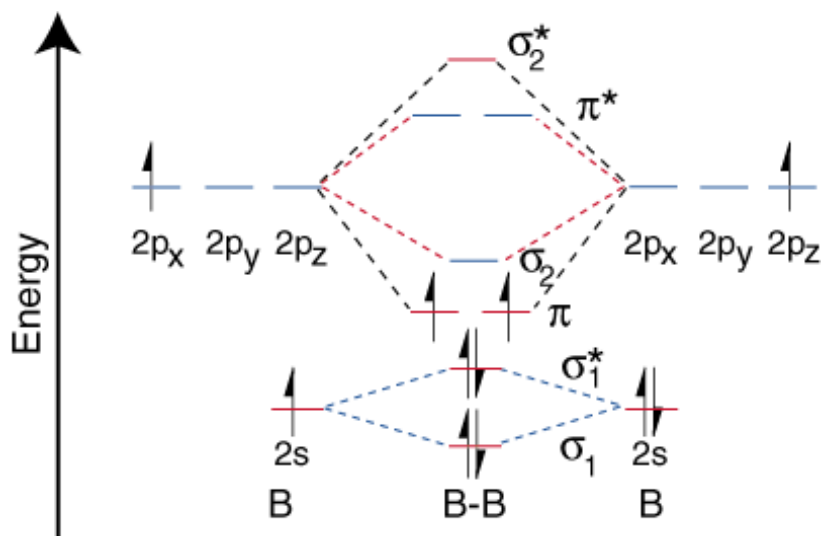
$$\begin{aligned} c_{21} &\approx 0, & c_{22} &< 1, & c_{23} &\neq 0 \\ c_{31} &\approx 0, & c_{33} &< 1, & c_{32} &\neq 0 \end{aligned}$$

Ennek megfelelően változik a $2\sigma_g$ és a $3\sigma_g$ pályák energiája is, az előbbi lefelé, az utóbbi felfelé. Úgy érthetjük ezt meg, hogy a két pálya kölcsönhat egymással egy alacsonyabb és egy magasabb energiájú pályát eredményezve.

A módosított energiadiagram tehát:



A B_2 energiadiagramja így néz ki tehát:



Konfiguráció: $1\sigma_g^2 1\sigma_u^2 2\sigma_g^2 2\sigma_u^2 1\pi_u^2$.

A π_u pályára négy elektron férne, tehát ez nyílt héj:

Állapot lehetséges szimmetriái: $\Pi_u \otimes \Pi_u = \Sigma_g^+ \oplus \Sigma_g^- \oplus \Delta_g$

Lehetséges állapotok, Pauli-elvet is figyelembe véve: $^3\Sigma_g^-, ^1\Sigma_g^+, ^1\Delta_g$

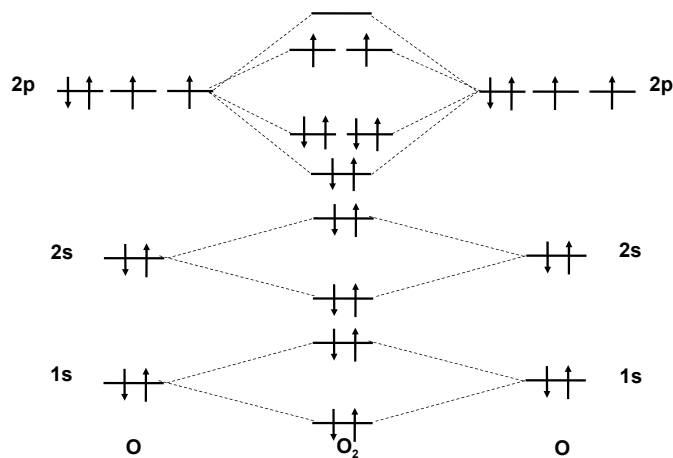
Energia sorrend: $E_{^3\Sigma_g^-} < E_{^1\Delta_g} < E_{^1\Sigma_g^+}$

Kötésrend: ≈ 1 , mert egy kötő pálya van betöltve két elektronnal.

Problémás még:

O_2

Az oxigénmolekula elektronszerkezete



Konfiguráció: $1\sigma_g^2 1\sigma_u^2 2\sigma_g^2 2\sigma_u^2 1\pi_u^4 3\sigma_g^2 1\pi_g^2$.

A π_g pályára négy elektron férne, tehát ez nyílt héj:

Állapot lehetséges szimmetriái: $\Pi_g \otimes \Pi_g = \Sigma_g^+ \oplus \Sigma_g^- \oplus \Delta_g$

Lehetséges állapotok, Pauli-elvet is figyelembe véve: $^3\Sigma_g^-, ^1\Sigma_g^+, ^1\Delta_g$

Energia sorrend: $E_{3\Sigma_g^-} < E_{1\Delta_g} < E_{1\Sigma_g^+}$

Kötésrend: ≈ 2 , mert három kötő pálya van betöltve ($3\sigma_g, 1\pi_u$) összesen hat elektronnal, míg a lazító $1\pi_g$ pályán két elektron van.

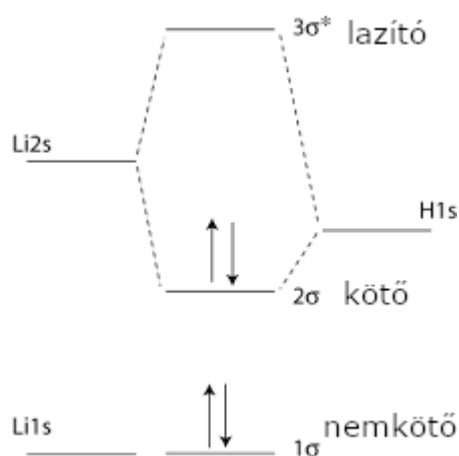
Az oxigén paramágneses, triplett az alapállapota!!!!

4.6. Az AB típusú kétatomos molekulák elektronszerkezete

Problémák:

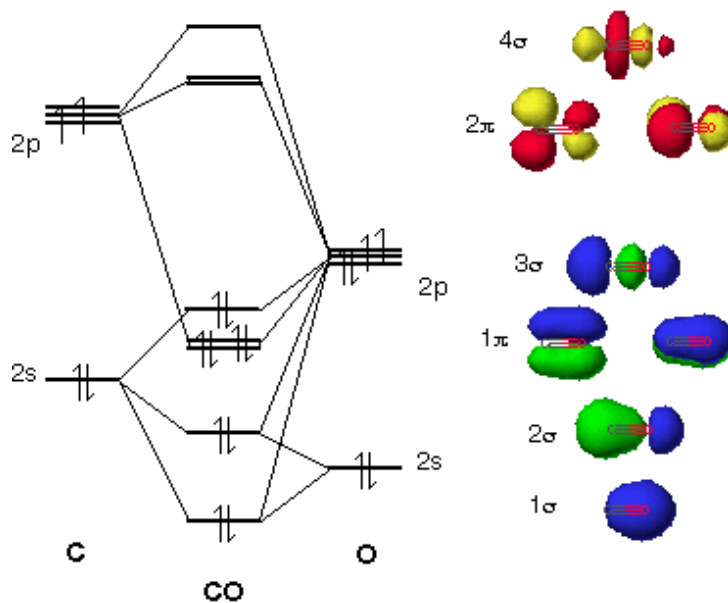
- a két atom pályáinak energiája nem egyenlő
- az atompályákból képzett kötő molekulapályák stabilizációja függ a pályák energia-különbségétől

Ezért nem elég a kvalitatív kép, kvantitatív meggondolásokra is szükség van!
LiH molekula:



pályae energiák: Li: -2.48 és -0.19 hartree, H: -0.5 hartree

Másik példa: CO molekula:



4.7. A vízmolekula elektronszerkezete

a. MO tárgyalás

A vízmolekula C_{2v} pontcsoportba tartozik, ennek karaktertáblája megtalálható a szimmetriáról szóló részben.

C_{2v}	E	C_2	$\sigma_v(yz)$	$\sigma_v(xz)$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

Pályákat közvetlenül a FEM-ből vesszük, pályae energiák alapján töltjük be.

Megvalósítás: Hartree-Fock LCAO-MO-val:

$$\Psi = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n|$$

$$\phi_i = \sum_a C_{ai} \chi_a$$

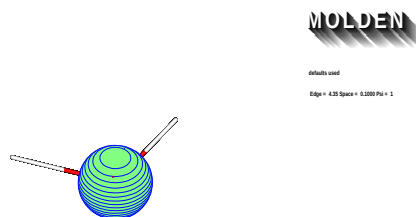
ahol χ_a a bázisfüggvény.

Konkrétan: ún. minimális bázist használunk, tehát az atom betöltött alhéjaihoz tartozó egy-egy függvényt választunk:

H: $1s_a, 1s_b$ O: $1s, 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$

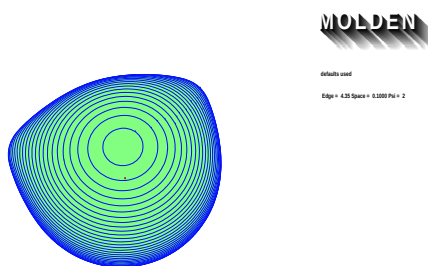
Elvégezve a számítást, a következő pályákat kapjuk:

$1a_1$ pálya (-20.52 hartree)



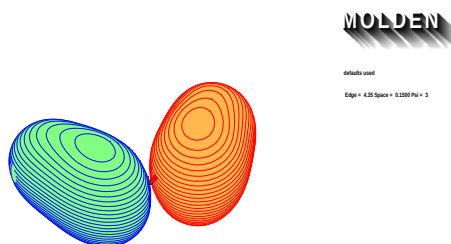
$1a_1$: $1s$ (törzs)

$2a_1$ pálya (-1.33 hartree)



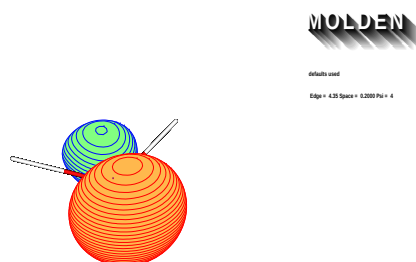
$2a_1$: $2s (-2p_z) + 1s_a + 1s_b$ kötő

$1b_1$ pálya (-0.67 hartree)



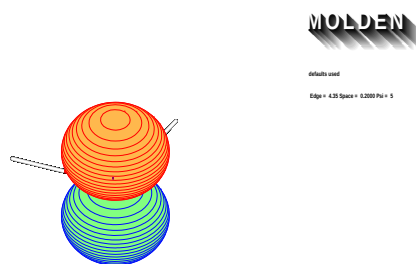
$1b_1$: $2p_y + 1s_a - 1s_b$ kötő

$3a_1$ pálya (-0.56 hartree)



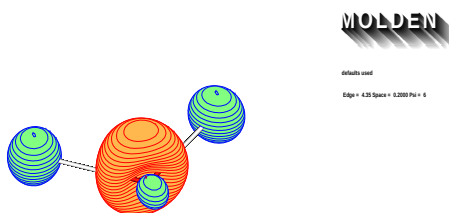
$3a_1$: $2p_z (+ 2s)$ nemkötő

$1b_2$ pálya (-0.52 hartree)



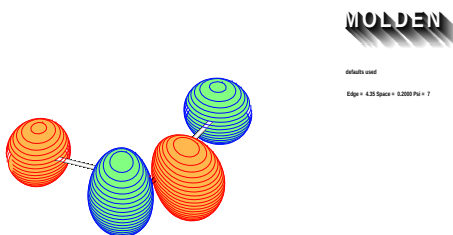
$1b_2$: $2p_x$ nemkötő

$4a_1$ pálya (0.33 hartree)



$4a_1$: $2s + 2p_z - 1s_a - 1s_b$ lazító

$2b_1$ pálya (0.49 hartree)



$2b_1$: $2p_y - 1s_a + 1s_b$ lazító

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

Konfiguráció: $(1a_1)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^2 (3a_1)^2 (1b_2)^2$

Állapot: 1A_1 (pályák betöltöttek $\Rightarrow$ teljesen szimmetrikus szinglett)

Gerjesztett állapotok:

konfiguráció: $(1a_1)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^2 (3a_1)^2 (1b_2)^1 (4a_1)^1$

$B_2 \otimes A_1 = B_2 \Rightarrow$ állapot: 3B_2 illetve 1B_2

konfiguráció: $(1a_1)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^2 (3a_1)^2 (1b_2)^1 (2b_1)^1$

$B_2 \otimes B_1 = A_2 \Rightarrow$ állapot: 3A_2 illetve 1A_2

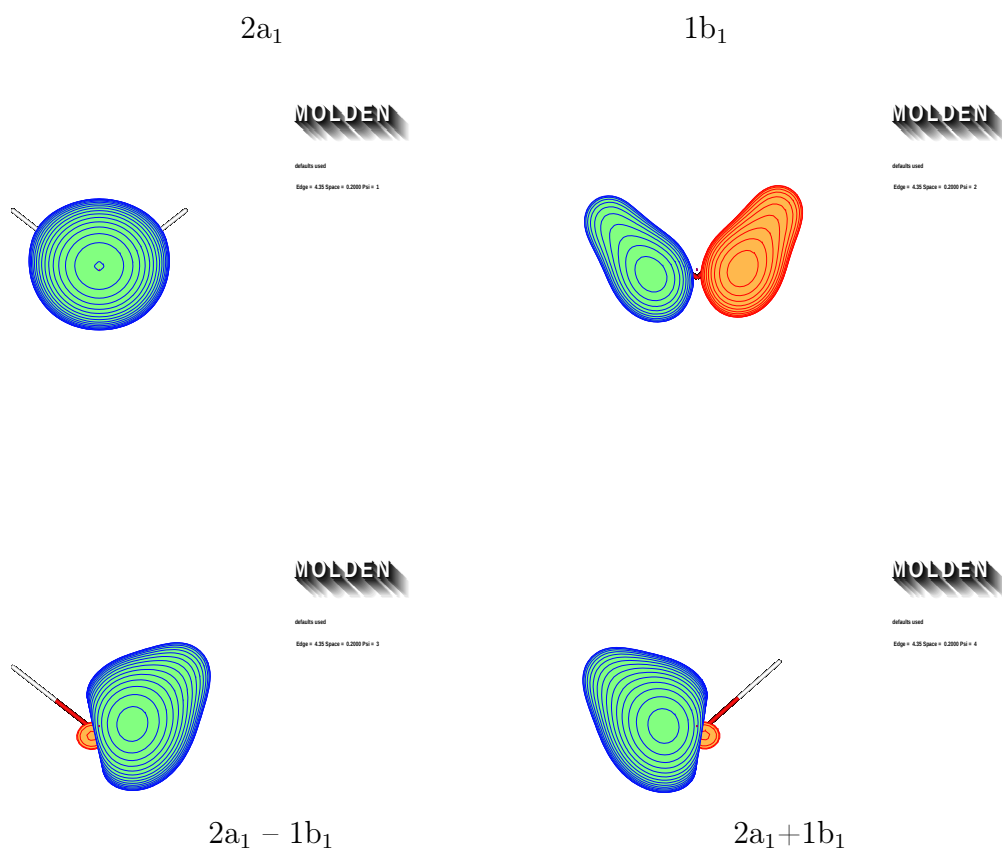
Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

b. Lokalizált pályák

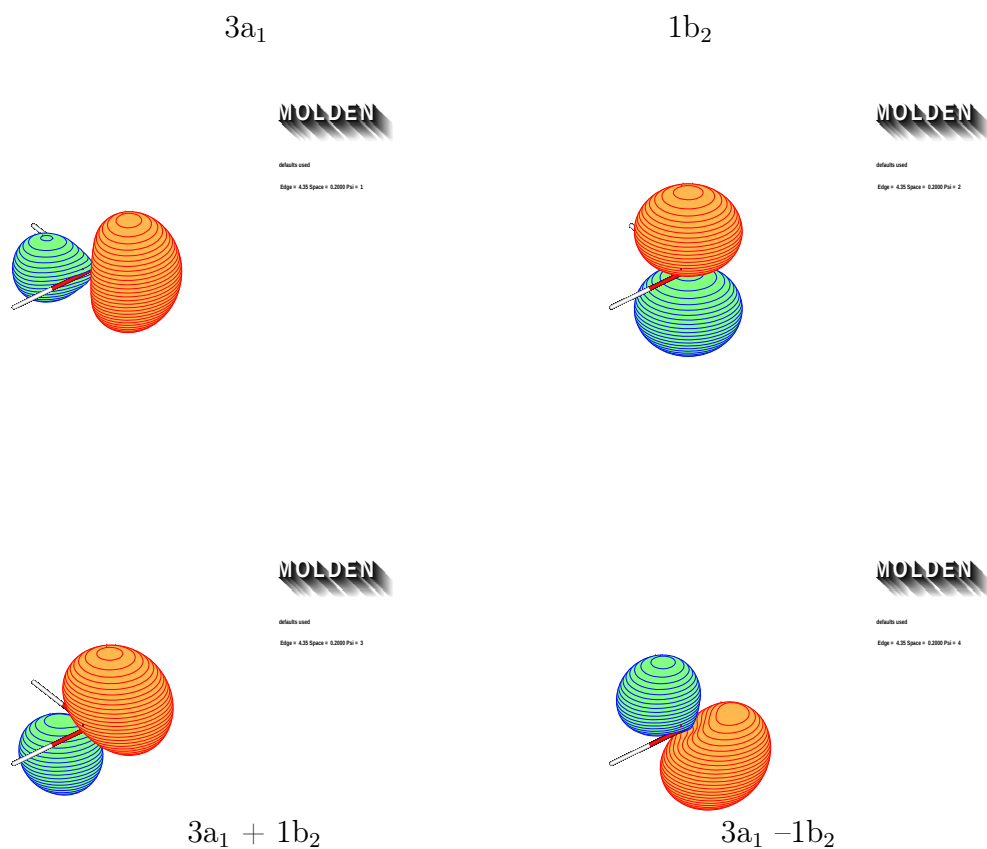
Milyenek voltak a kötések? Két kötőpálya, mindhárom atomra kiterjed
A kémiai szemlélet nem ilyen kötésekkel ad!

Emlékeztető: „pályáknak nincs fizikai jelentése”, determináns hullámfüggvény esetén a pályák bármely lineárkombinációja ugyanazt a determinánst adja.

Tehát: vehetjük a pályák lineárkombinációit!



A kémiai szemléletnek megfelelő két kötőpályát kaptunk!!



A kémiai szemléletnek megfelelő két nemkötő párt kaptunk

A lokalizált és kanonikus pályák összehasonlítása:

	kanonikus	lokalizált
pályaenergia	van	nincs
szimmetria	van	nincs
két atomhoz rendelhető kötés	nincs	igen
atomhoz rendelhető nemkötő pár	nincs	igen

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

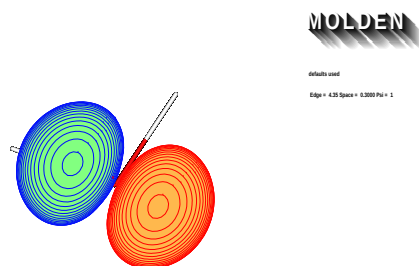
„Hibridpályák” (részleteket l. később)

A bázisfüggvényekből közvetlenül a (lokalizált) kötő pályákat szeretnénk megadni.

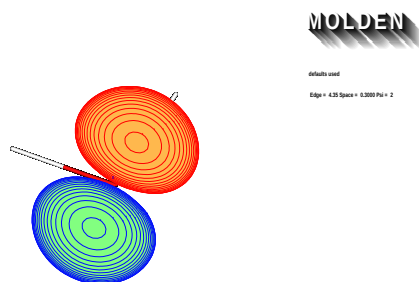
Tudjuk: bázisfüggvények kifeszítenek egy teret, ha az egyes függvények lineárkombinációját alkalmazzuk bázisként, az ugyanazt a teret írja le, tehát semmi nem változik.

Készítsünk tehát olyan „hibridpályákat”, amelyek a kötések irányába mutatnak:

$h_1 = 2p_z + 2p_y$ pálya:

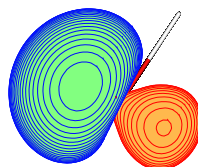


$h_2 = 2p_z - 2p_y$ pálya:



Keverjünk hozzájuk 2s-t is!

$$h'_1 = h_1 + 2s$$

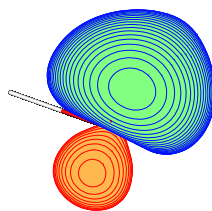


MOLDEN

default unit

Edge = 4.25 Space = 0.2000 Pix = 3

$$h'_2 = h_2 + 2s$$



MOLDEN

default unit

Edge = 4.25 Space = 0.2000 Pix = 4

(És persze lesz egy harmadik kombináció is: $h'_3 = 2s - h_1 + h_2$)

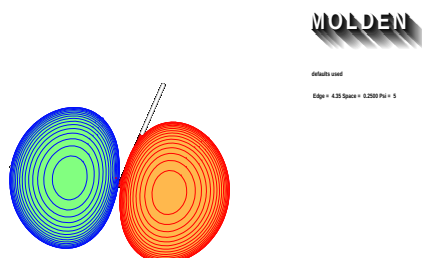
Ezek tehát a kötés irányába mutatnak, így:

$h'_1 + 1s_a$ első kötés

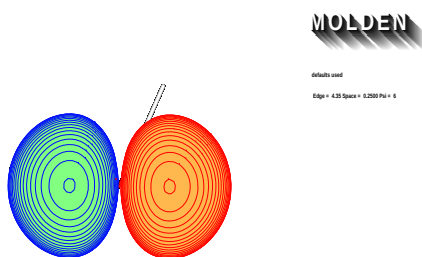
$h'_2 + 1s_b$ második kötés

Fontos: hibridpályában benne van az eredmény, hiszen úgy képezzük azokat, hogy a kötést kiadja!!!!

Például: h_1' és h_2' nem pont a kötés irányába mutat!!!



Változtassuk a p_y és a p_z arányát:



Az ábra mutatja, hogy egyre nagyobb $2p_z$ részvétel elforgatja. (Figyelem, ennek hatalmasan nagy jelentősége lesz!)

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

c. VB leírás hibridpályákkal

A H-molekulánál láttuk, hogy a VB elméletben elektronpárokat képzünk a párosítatlan elektronokból (térbeli rész):

$$\Psi_{HL} = 1s_a(1) 1s_b(2) + 1s_a(2) 1s_b(1) \quad (92)$$

Ebből következik, csak a párosítatlan elektronokat kell figyelembe venni, mégpedig célszerűen a fenti hibridpályákon, hiszen ezek a szomszédos atomok felé mutatnak.

O: h_1' és h_2'

H: $1s_a$ és $1s_b$

(l. a h' ábráját fentebb!)

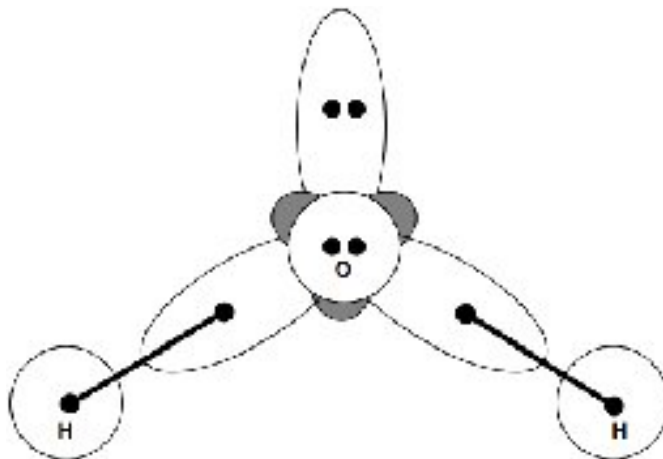
$$f_1(1,2) = 1s_a(1)h_1'(2) + 1s_a(2)h_1'(1)$$

$$f_2(3,4) = 1s_b(3)h_2'(4) + 1s_b(4)h_2'(3)$$

másik nem is kell, amint az ábráról látható (átfedés kicsi)!

$$\Psi_{HL}(1,2,3,4) = f_1(1,2) \cdot f_2(3,4) \quad (93)$$

Grafikusan ábrázolva:



Mint láttuk, a szög a hibridpályákban beállítható, tehát kaphatunk jó eredményt!

Csakhogy: az eredményt kell ismerni!

Kvalitatív tárgyaláshoz ez jó: ezen alapul a Lewis-féle szerkezetírás szabálya (l. később)

4.8. Molekulák kvalitatív elektronszerkezete a hibridpályákra épülő VB elmélet alapján

a. A metánmolekula

Atomi konfigurációk:

C: $1s^2 2s^2 2p^2$

Tudjuk: a C atom négy egyforma kötést létesít. De hogyan?

1. Csak két párosítatlan elektron.
2. Ezek 3 db p pályán.

Hogy lesz ebből négy egyforma kötés?

Megoldás:

1. „promóció” (gerjesztés): $2s^2 2p^2 \rightarrow 2s^1 2p^3$
2. hibridizáció: 2s és a három p pályából: „ **sp^3 hibridizáció**”

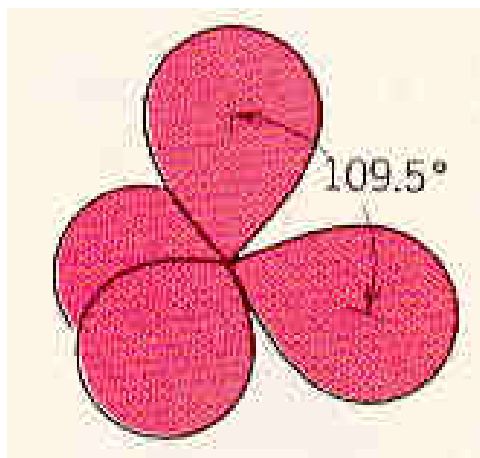
$$h_1 = 2s + 2p_x + 2p_y + 2p_z$$

$$h_2 = 2s - 2p_x - 2p_y + 2p_z$$

$$h_3 = 2s - 2p_x + 2p_y - 2p_z$$

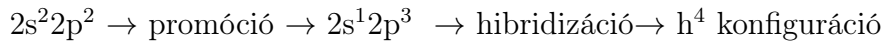
$$h_4 = 2s + 2p_x - 2p_y - 2p_z$$

Ezek a pályák a tetraéder négy csúcsa felé mutatnak:



sp^3 hibridpályák

A fiktív folyamat a kötések létesítése előtt:



Megjegyzés: h^4 u.a. a gömbszimmetrikus elektroneloszlás mint $s^1 p^3$

Most képezhetjük az elektronpárokat:

$$f_1(1,2) = h_1(1)1s_a(2) + h_1(2)1s_a(1)$$

$$f_2(3,4) = h_2(3)1s_b(4) + h_2(4)1s_b(3)$$

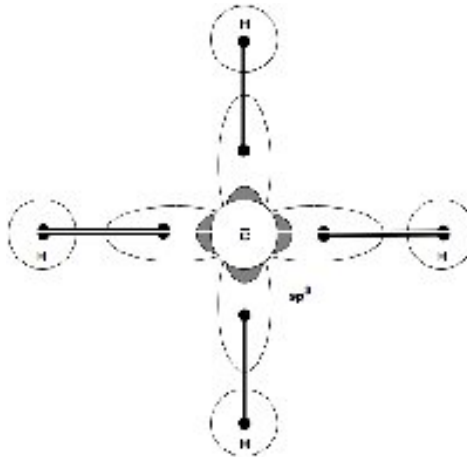
$$f_3(5,6) = h_3(5)1s_c(6) + h_3(6)1s_c(5)$$

$$f_4(7,8) = h_4(7)1s_d(8) + h_4(8)1s_d(7)$$

$$\Phi_{\text{HL}}(1,2,\dots,8) = f_1(1,2) \cdot f_2(3,4) \cdot f_3(5,6) \cdot f_4(7,8)$$

Más konfiguráció nem is kell, mert a pályák így mutatnak egymás felé.

Grafikusan ábrázolva:



Tehát: felhasználva, hogy a metánban négy egyforma kötés van, a VB elmélettel le tudtuk írni a tetraéder csúcsai felé mutató négy kötéset.

b. Az etilénmolekula

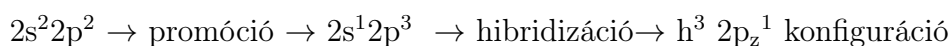
Atomi konfiguráció u.a. Most azonban nem négy egyforma kötéset akarunk, hanem két-két CH kötéset valamint a CC kötéset. Tehát a C atomok három atommal adnak kötéset:

Más hibridizáció: $2s 2p_x 2p_y \rightarrow$ három hibridpálya

A $2p_z$ pálya változatlan marad

„ sp^2 hibridizáció”

A fiktív folyamat a kötések létesítése előtt:

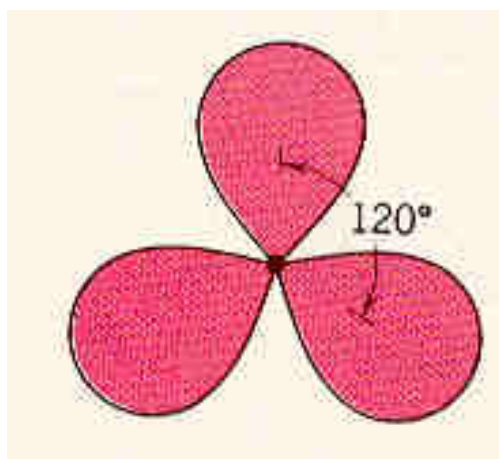


$$h_1 = 2s + 2p_x + 2p_y$$

$$h_2 = 2s - 2p_x - 2p_y$$

$$h_3 = 2s - 2p_x + 2p_y$$

Ezek a pályák a háromszög csúcsai felé mutatnak:



sp^2 hibridpályák

A párosítatlan elektronok tehát a következő pályákon vannak:

$1s_a, 1s_b, 1s_c, 1s_d, h_{11}, h_{21}, h_{31}, 2p_{z1}, h_{12}, h_{22}, h_{32}, 2p_{z2}$

Most képezhetjük az elektronpárokat:

$$f_{CH1}(1,2) = h_{11}(1)1s_a(2) + h_{11}(2)1s_a(1)$$

$$f_{CH2}(3,4) = h_{21}(3)1s_b(4) + h_{21}(4)1s_b(3)$$

$$f_{CH3}(5,6) = h_{12}(5)1s_c(6) + h_{12}(6)1s_c(5)$$

$$f_{CH4}(7,8) = h_{22}(7)1s_d(8) + h_{22}(8)1s_d(7)$$

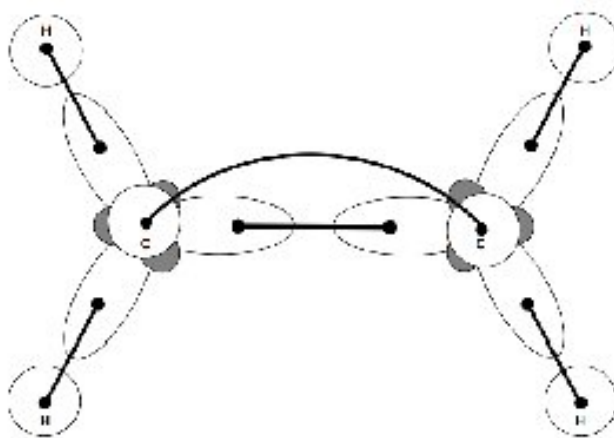
$$f_{CC1}(9,10) = h_{31}(9)h_{32}(10) + h_{31}(10)h_{32}(9)$$

$$f_{CC2}(11,12) = 2p_{z1}(11)2p_{z2}(12) + 2p_{z1}(12)2p_{z2}(11) \quad \Pi\text{-kötés}$$

$$\Phi_{HL}(1,2,\dots,12) = f_{CH1}(1,2) \cdot f_{CH2}(3,4) \cdot f_{CH3}(5,6) \cdot f_{CH4}(7,8) \cdot f_{CC1}(9,10) \cdot f_{CC2}(11,12)$$

Más rezonanciaszerkezet nem lényeges!

Grafikusan ábrázolva:



Tehát a C és H atomok között egy-egy kötés, a C atomok között kettős kötés.

c. Az acetilénmolekula

Itt már csak két-két atommal létesítenek kötést a C atomok.

Más hibridizáció: $2s\ 2p_z \rightarrow$ két hibridpálya

A $2p_x$ és $2p_y$ pálya változatlan marad.

„sp hibridizáció”

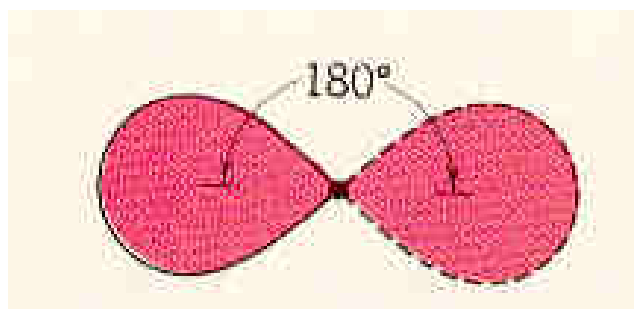
A fiktív folyamat a kötések létesítése előtt:

$2s^2 2p^2 \rightarrow$ promóció $\rightarrow 2s^1 2p^3 \rightarrow$ hibridizáció $\rightarrow h^2\ 2p_x^1\ 2p_y^1$ konfiguráció

$h_1 = 2s + 2p_z$

$h_2 = 2s - 2p_z$

Ezek a pályák egy egyenesbe esnek.



sp hibridpályák

A párosítatlan elektronok tehát a következő pályákon vannak:

$1s_a, 1s_b, h_{11}, h_{21}, 2p_{x1}, 2p_{y1}, h_{12}, h_{22}, 2p_{x2}, 2p_{y2}$

Most képezhetjük az elektronpárokat:

$f_{CH1}(1,2) = h_{11}(1)1s_a(2) + h_{1a}(2)1s_a(1)$

$f_{CH2}(3,4) = h_{12}(3)1s_b(4) + h_{1b}(4)1s_b(3)$

$f_{CC1}(5,6) = h_{21}(5)h_{22}(6) + h_{21}(6)h_{22}(5)$

$f_{CC2}(7,8) = 2p_{x1}(7)2p_{x2}(8) + 2p_{x1}(8)2p_{x2}(7)$

$f_{CC2}(9,10) = 2p_{y1}(9)2p_{y2}(10) + 2p_{y1}(10)2p_{y2}(9)$

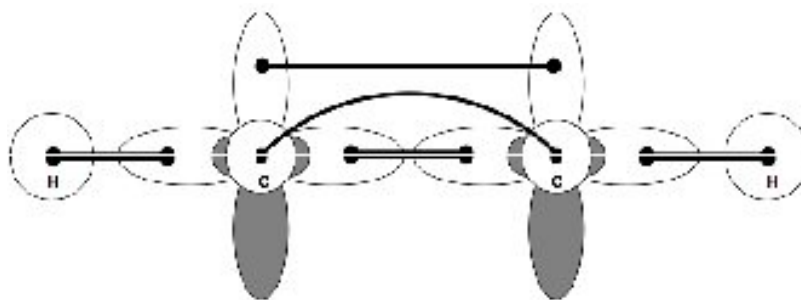
Π -kötés

Π -kötés

$\Phi_A(1,2,\dots,10) = f_{CH1} \cdot f_{CH2} \cdot f_{CC1} \cdot f_{CC2} \cdot f_{CC3}$

Más rezonanciaszerkezet itt sem lényeges!

Grafikusan ábrázolva:



Tehát a C és H atomok között egy-egy kötés, a C atomok között hármas kötés.

d. Az ammóniamolekula

Atomi konfigurációk:

H: $1s$

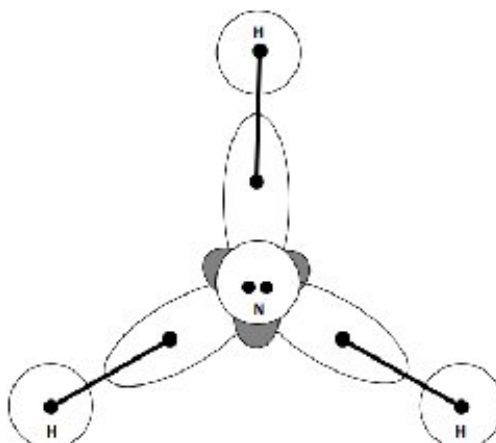
N: $1s^2 2s^2 2p^3$

A nitrogén három atommal létesít kapcsolatot.

Az előzőek alapján sp^2 hibrid:

$2s^2 2p^3 \rightarrow \text{promóció} \rightarrow 2s^1 2p^4 \rightarrow \text{hibridizáció} \rightarrow h^3 2p_z^2$ konfiguráció

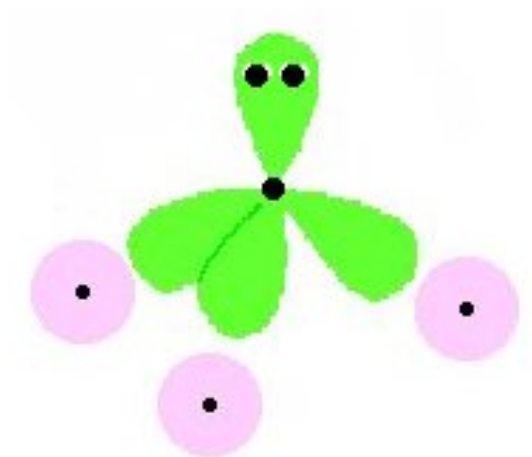
Ez síkbeli lenne! De tudjuk, hogy nem az! Grafikusan ábrázolva:



Ezért próbáljuk meg az sp^3 hibridizációt is:

$2s^2 2p^3 \rightarrow \text{promóció} \rightarrow 2s^1 2p^4 \rightarrow \text{hibridizáció} \rightarrow h^5$ konfiguráció

Piramisos szerkezet, fölül nemkötő elektrópár!



Tehát számolás nélkül nem mindig kaphatjuk meg a jó szerkezetet!

e. Az allilgyök (C_3H_5)

C atom: sp^2 hibridizáció

Párosítatlan elektronok

$$1s_a, 1s_b, 1s_c, 1s_d, 1s_e, h_{11}, h_{21}, h_{31}, 2p_{z1}, h_{12}, h_{22}, h_{32}, 2p_{z2}, h_{13}, h_{23}, h_{33}, 2p_{z3}$$

Az elektronpárok:

$$\begin{aligned} f_{CH1}(1,2) &= h_{11}(1)1s_a(2) + h_{11}(2)1s_a(1) \\ f_{CH2}(3,4) &= h_{21}(3)1s_b(4) + h_{21}(4)1s_b(3) \\ f_{CH3}(5,6) &= h_{12}(5)1s_c(6) + h_{12}(6)1s_c(5) \\ f_{CH4}(7,8) &= h_{13}(7)1s_d(8) + h_{13}(8)1s_d(7) \\ f_{CH5}(9,10) &= h_{23}(9)1s_e(10) + h_{23}(10)1s_e(9) \\ f_{CC1}(11,12) &= h_{31}(11)h_{22}(12) + h_{31}(12)h_{22}(11) \\ f_{CC2}(13,14) &= h_{32}(13)h_{33}(14) + h_{32}(14)h_{33}(13) \end{aligned}$$

Megmaradt három db $2p_z$ pálya és három elektron. Csak egy kötés, erre két lehetőség:

$$\begin{aligned} f_{\Pi1}(15,16) &= 2p_{z1}(15)2p_{z2}(16) + 2p_{z1}(16)2p_{z2}(15) \quad \text{és} \quad 2p_{z3}(17) \\ f_{\Pi2}(15,16) &= 2p_{z3}(15)2p_{z2}(16) + 2p_{z3}(16)2p_{z2}(15) \quad \text{és} \quad 2p_{z1}(17) \end{aligned}$$

Az utolsó elektron pedig a kötésben részt nem vevő pályára kerül

Két rezonanciaszerkezet tehát:

$$\Phi_A(1,2,\dots,17) = f_{CH1}(1,2) \cdot f_{CH2}(3,4) \cdot f_{CH3}(5,6) \cdot f_{CH4}(7,8) \cdot f_{CH5}(9,10) \cdot f_{CC1}(11,12) \cdot f_{CC2}(13,14) \cdot f_{\Pi1}(15,16) \cdot 2p_{z3}(17)$$

$$\Phi_B(1,2,\dots,17) = f_{CH1}(1,2) \cdot f_{CH2}(3,4) \cdot f_{CH3}(5,6) \cdot f_{CH4}(7,8) \cdot f_{CH5}(9,10) \cdot f_{CC1}(11,12) \cdot f_{CC2}(13,14) \cdot f_{\Pi2}(15,16) \cdot 2p_{z1}(17)$$

A teljes hullámfüggvény ezek kombinációja:

$$\Psi_{VB} = c_A \Phi_A + c_B \Phi_B$$

Találtunk egyszeres kötések a C és H-k között, egyszeres kötés a C-k között és egy parciális Π -kötést a három C atom között, valamint egy delokalizált párosítatlan elektront!!!

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

f. A Lewis-féle képletírás és a VB elmélet kapcsolata:

Szabályok (Ált. Kém.-ből):

1. megszámoljuk a vegyértékelektronokat
2. a központi atom köré egyszeres kötéseket rajzolunk
3. a terminális atomokon nemkötő elektronpárokkal az elektronok számát oktettre egészítjük ki
4. a maradék elektronokat a központi atom köré helyezzük el
5. ha a központi atomon még így sincs oktett, többszörös kötéseket definiálunk
6. megállapítjuk az atomokon a formális töltéseket - a szétválás minimális legyen

Magyarázat:

2. hibridizációval a szomszédos atomok felé mutató pályákat szerkesztünk
3. a terminális atomokon a kötésben nem lévő hibrid-, illetve atompályákat feltöltjük két-két elektronnal
4. u.ezt a központi atomon is elvégezzük
5. Π -kötések
6. határszerkezetek

Tehát a Lewis-féle szerkezetírás elméleti alapja a hibridpályákkal értelmezett VB elméletben van!

Oktett szabály: $2s + 2p$ pályákból (4 db) indulunk ki. Mindegyik pályát párosan, két elektronnal akarunk betölteni, tehát 8 elektron fér el.

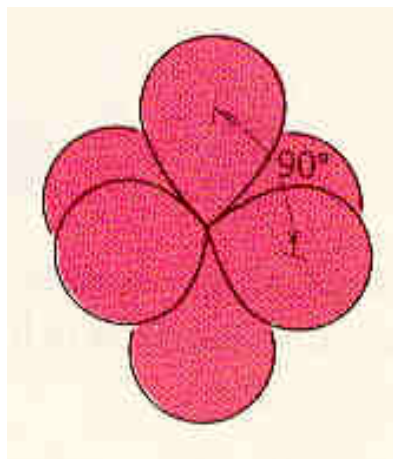
g. A hibridizáció összefoglalása

Típusok:

1. $sp^3 \rightarrow$ tetraéderes (ábrát l. fentebb)
2. $sp^2 \rightarrow$ háromszög (ábrát l. fentebb)
3. $sp \rightarrow$ lineáris (ábrát l. fentebb)

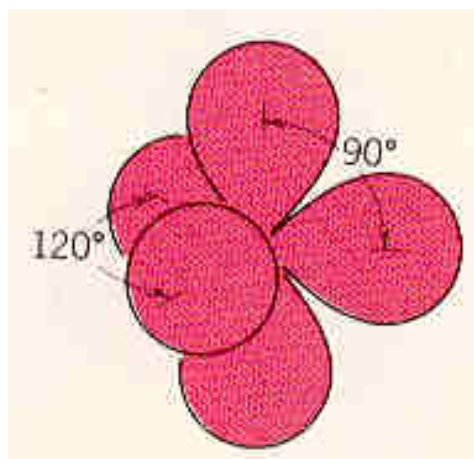
Átmenti fémek estén a d-pálya is részt vehet. Pl.:

$sp^3d^2 \rightarrow$ oktaéderes komplex



sp^3d^2 hibridpályák

$sp^3d \rightarrow$ trigonális bipiramisos komplex



sp^3d hibridpályák

Nagyon fontos megjegyezni a hibridpályák kapcsán:

1. belevisszük a végeredményt, hiszen olyan kombinációt képezünk, hogy a kötés irányába mutasson
2. a hibridizáció egyszerű bázistranszformáció, önmagában fizikailag semmit sem jelent.

4.9. A Hückel-féle közelítés

4.9.1. Közelítések

1. $\sigma - \pi$ szeparáció: a σ (síkbeli) és π elektronok közötti kölcsönhatást elhanyagoljuk
2. $\hat{H}$ operátor:

$$\hat{H} = \sum_i^{\pi} \hat{h}^{eff}(i)$$

3. Hullámfüggvény: szorzat alakban (nem determináns!!), térbeli pályák kétszeresen betöltve

$$\Psi(1, 2, 3, \dots, 2n) = u_1(1)\alpha(1)u_1(2)\beta(2)u_2(3)\alpha(3) \dots u_n(2n)\beta(2n)$$

Következmény: Sajátérték-egyenlet: $\hat{h}^{eff}u_i = \varepsilon_i u_i$ Energia: $E = 2 \sum_i^n \varepsilon_i$

4. Bázis: minimális bázis: minden C atomon egy db. $2p_z$ pálya ($p_1, p_2, \dots, p_n$)
5. Pályákat az így kapott (egyszerűsített) mátrix sajátérték-egyenletből határozzuk meg: ($\underline{\underline{h}}^{eff} \underline{\underline{c}} = \varepsilon \underline{\underline{c}}$)
6. Integrálok (diagonális elemek α , szomszédok között β , egyébként 0):

$$\begin{aligned} \langle p_1 | \hat{h}^{eff} | p_1 \rangle &= \alpha \\ \langle p_2 | \hat{h}^{eff} | p_2 \rangle &= \alpha \\ &\vdots \\ \langle p_n | \hat{h}^{eff} | p_n \rangle &= \alpha \\ \langle p_1 | \hat{h}^{eff} | p_2 \rangle &= \beta \\ \langle p_1 | \hat{h}^{eff} | p_3 \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle p_1 | \hat{h}^{eff} | p_n \rangle &= 0 \\ \langle p_2 | \hat{h}^{eff} | p_3 \rangle &= \beta \\ \langle p_2 | \hat{h}^{eff} | p_4 \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle p_{n-1} | \hat{h}^{eff} | p_n \rangle &= \beta \end{aligned}$$

Megoldandó tehát a következő mátrix sajátérték-egyenlete:

$$\underline{\underline{h}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

4.9.2. Etilén

$$\underline{\underline{h}}^{eff} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

A sajátérték-egyenlet kell megoldani:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{h}}^{eff} \underline{\underline{c}}(i) &= \varepsilon \underline{\underline{c}}(i) \\ \begin{pmatrix} \alpha - \varepsilon & \beta \\ \beta & \alpha - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha - \varepsilon & \beta \\ \beta & \alpha - \varepsilon \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Ebből:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha + \beta & c_1 &= c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varepsilon_2 &= \alpha - \beta & c_1 &= -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

A sajátfüggvények:



etil_hueck_1.gif



etil_hueck_2.gif

Energiadiagramm:



Teljes energia:

$$E = 2\alpha + 2\beta \quad (94)$$

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

4.9.3. Butadién

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

4x4-es probléma, negyedrendű egyenlet oldandó meg.

Eredmény:

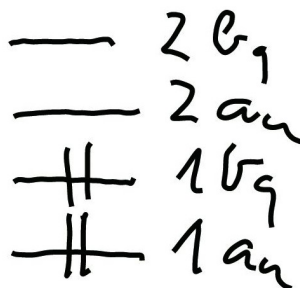
$$1a_u : \varepsilon_1 = \alpha + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\beta = \alpha + 1.62\beta$$

$$1b_g : \varepsilon_2 = \alpha - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\beta = \alpha + 0.62\beta$$

$$2a_u : \varepsilon_3 = \alpha + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\beta = \alpha - 0.62\beta$$

$$2b_g : \varepsilon_4 = \alpha - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\beta = \alpha - 1.62\beta$$

Energiadiagramm:



Konfiguráció: $(1a_u)^2(1b_g)^2$

Állapot: 1A_g

Teljes energia: $E_{butadien} = 4\alpha + 4.48\beta$

Delokalizációs energia: $E_{butadien} - 2E_{etilen} = (4\alpha + 4.48\beta) - (4\alpha + 4\beta) = 0.48\beta$

Kérdés: mit kapnánk a cis-butadiénre?

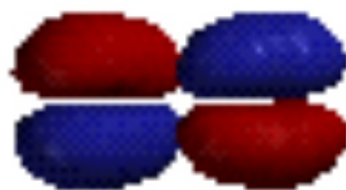
Sajátfüggvények:



buta_hueck_2bg.gif



buta_hueck_2au.gif



buta_hueck_bg.gif



buta_hueck_au.gif

4.9.4. Benzol

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

6x6-os probléma (de ki lehetne használni a szimmetriát, D_{6h} pontcsoport).

A diagonalizálás eredménye:

$$a_{2u} : \quad \varepsilon_1 = \alpha + 2\beta$$

$$e_{1g} : \quad \varepsilon_2 = \alpha + \beta$$

$$e_{2u} : \quad \varepsilon_3 = \alpha - \beta$$

$$b_{2g} : \quad \varepsilon_4 = \alpha - 2\beta$$

Az e_{1g} és az e_{2u} pályák a szimmetria miatt degeneráltak!

Energiadiagramm:



Konfiguráció $(a_{2u})^2(e_{1g})^4$

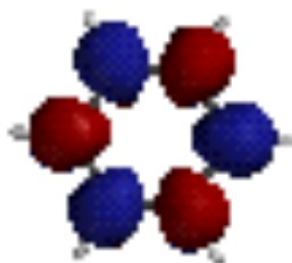
Állapot: $^1A_{1g}$

Energia: $E = 6\alpha + 8\beta$

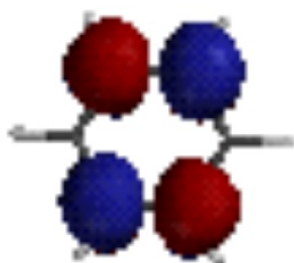
Delokalizációs energia: $E_{benzol} - 3E_{etilen} = (6\alpha + 8\beta) - 6(\alpha + \beta) = 2\beta$

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

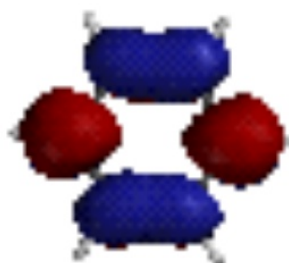
Sajátfüggvények:



benzol_hueck_b2g.gif



benzol_hueck_e2u_1.gif



benzol_hueck_e2u_2.gif



benzol_hueck_e1g_1.gif



benzol_hueck_e1g_2.gif



benzol_hueck_a2u.gif

4.10. Átmenetifém–komplexek elektronszerkezete

Rendszer:

- „átmeneti fém”: atom vagy pozitív ion
→ betöltetlen héj, elektronokat tud fogadni
- „ligandumok”: negatív ion, vagy erős dipólus, általában zárt héj
→ elektronokat küld (nemkötő pár, π -elektronok)

Tárgyalás:

- Kristálytér-elmélet: csak szimmetria
- Ligandumtér-elmélet: egyszerű MO-elmélet

Választ keresünk:

- mitől stabilak
- mitől színesek
- miért van jellemző ESR spektrumuk

Elméleti Kémia (kv1c1lm1e/1)

4.10.1. Kristálytér-elmélet (Bethe, 1929)

Elv:

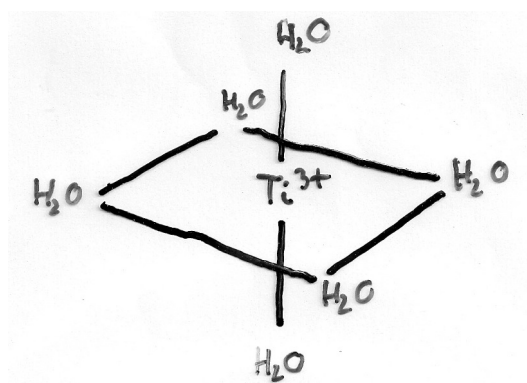
- a központi atom (ion) elektronszerkezetét a hozzá ionosan kapcsolódó ligandumok perturbálják
- ligandumok elektronjait egyáltalán nem vesszük figyelembe

Elnevezés eredete: a kristályrácsban a szomszédos ion tere hasonlóan befolyásolja a ki-szemelt ion elektronszerkezetét.

	atom	komplex
pontcsoport	O_3^+ (gömbszimmetrikus)	alacsonyabb szimmetria
pályák	degenerált d	degeneráció (részben) megszűnik

Tehát az elmélet tisztán szimmetria-meggondolásokra épül!!

Példa: $[Ti(H_2O)_6]^{3+}$



Pontcsoport: O_h

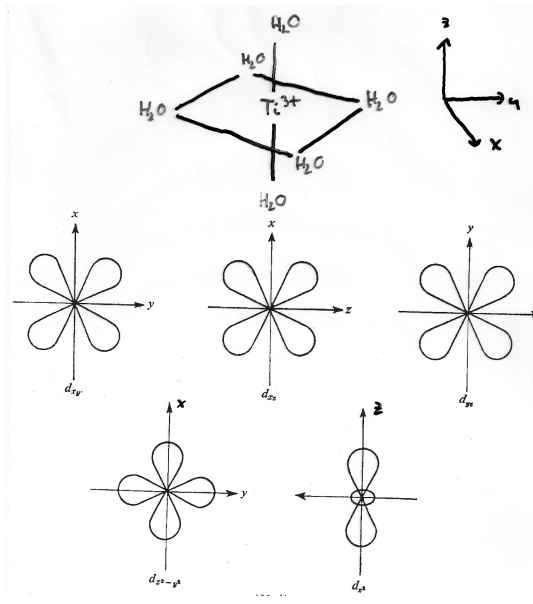
O_h pontcsoport karaktertáblája:

O_h	I	$8C_3$	$6C_2$	$6C_4$	$3C_2=(C_4^2)$	i	$6S_4$	$8S_6$	$3\sigma_h$	$6\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2+y^2+z^2$
A_{2g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1		$(2z^2-x^2-y^2)$
E_g	2	-1	0	0	2	2	0	-1	2	0		(x^2-y^2)
T_{1g}	3	0	-1	1	-1	3	1	0	-1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_{2g}	3	0	1	-1	-1	3	-1	0	-1	1		(xz, yz, xy)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	-1	0	0	2	-2	0	1	-2	0		
T_{1u}	3	0	-1	1	-1	-3	-1	0	1	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	0	1	-1	-1	-3	1	0	1	-1		

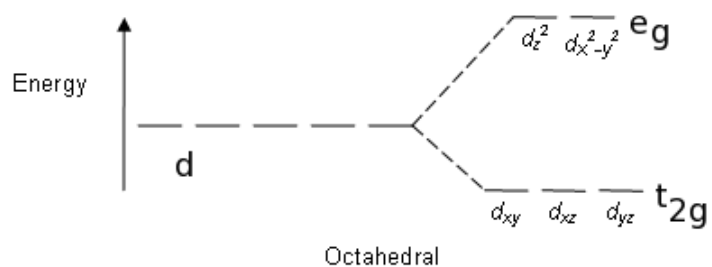
Alacsonyabb szimmetria miatt az 5 db d-pálya reducibilis reprezentációt feszít ki:

$$\Gamma(5 \text{ db } d \text{ fv}) = T_{2g} + E_g$$

$$E_g : d_{z^2}, d_{x^2-y^2} \quad T_{2g} : d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}$$



Energiaszintek:



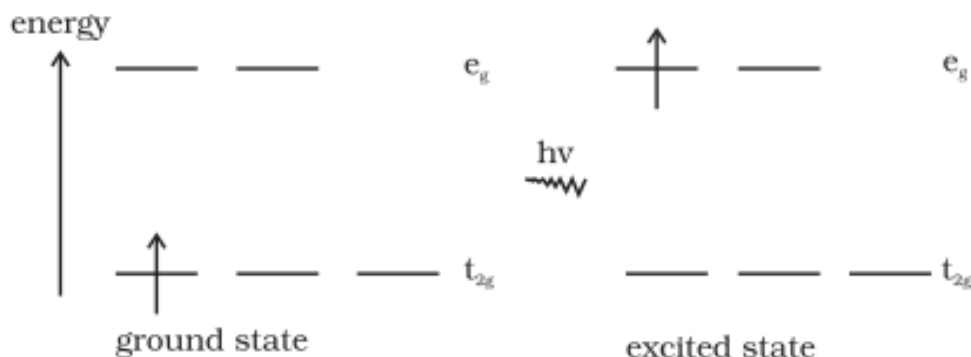
Felhasadás mértéke:

- az elmélet erről nem mond semmit
- de: $6 \cdot \Delta_{t_{2g}} = 4 \cdot \Delta_{e_g}$, azaz az átlagos energia nem változik!

$[Ti(H_2O)_6]^{3+}$ részletesebben:

Ti: $\dots 3d^2 4s^2$

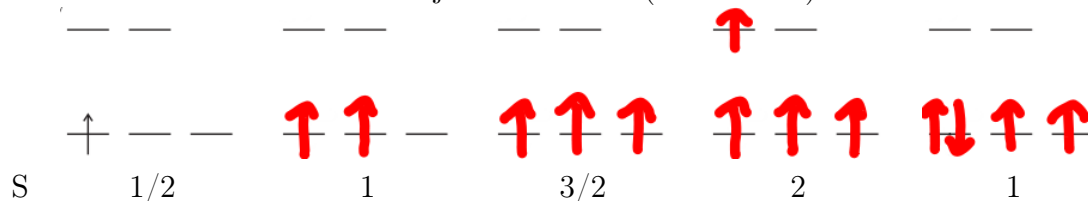
Ti^{3+} : $\dots 3d^1$



konfiguráció:	d^1	$(t_{2g})^1$	$(e_g)^1$
Állapot:	2D	${}^2T_{2g}$	2E_g
	atom	komplex	
		alapállapot	gerjesztett állapot

Alap- és gerjesztett állapot között az energiakülönbség kicsi $\rightarrow$ lila szín (20400 cm^{-1})

Mi van több elektron esetén: betöltjük a szinteket (Aufbau-elv):



A negyedik elektrontól kezdve a betöltés attól függ, hogy Δ és a kicserélődési kölcsönhatás (K) hogyan viszonyul egymáshoz:

- ha $\Delta > K$, akkor az alsó szintre kerül (kis spinszámú komplex)
- ha $\Delta < K$, akkor a felső szintre kerül (nagy spinszámú komplex)

Erős kristálytér: a felhasadás elég nagy, hogy az alacsony multiplicitású állapot valósuljon meg

Gyenge kristálytér: a felhasadás kicsi, a nagy spinű állapot valósul meg.

Vizsgálat: ESR spektroszkópia (l. később)

4.10.2. Ligandumtér-elmélet

Elv: MO-elmélet

- a központi atom és ligandum pályái kölcsönhatnak $\rightarrow$ kötő és lazító pályák
- fontos a szimmetria: mely pályák keveredhetnek?

Bázis:

- atom (ion): 3d, 4s, 4p pályák
- ligandumok (zárt héj!!): egy-egy s-szerű pálya („superminimális bázis”) (néha esetleg π pálya is)

Szimmetriaadaptált bázis:

a komplex pontcsoportjának megfelelően irreducibilis reprezentációkra bontjuk.

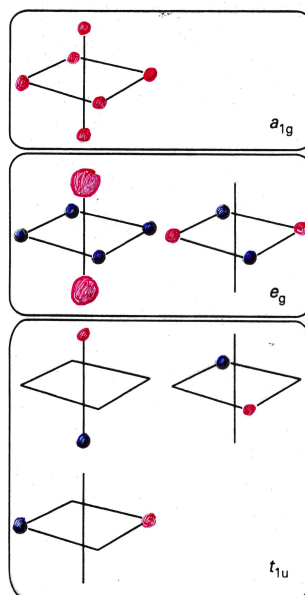
Példa: Oktaéderekes komplex (O_h pontcsoport)

Bázis:

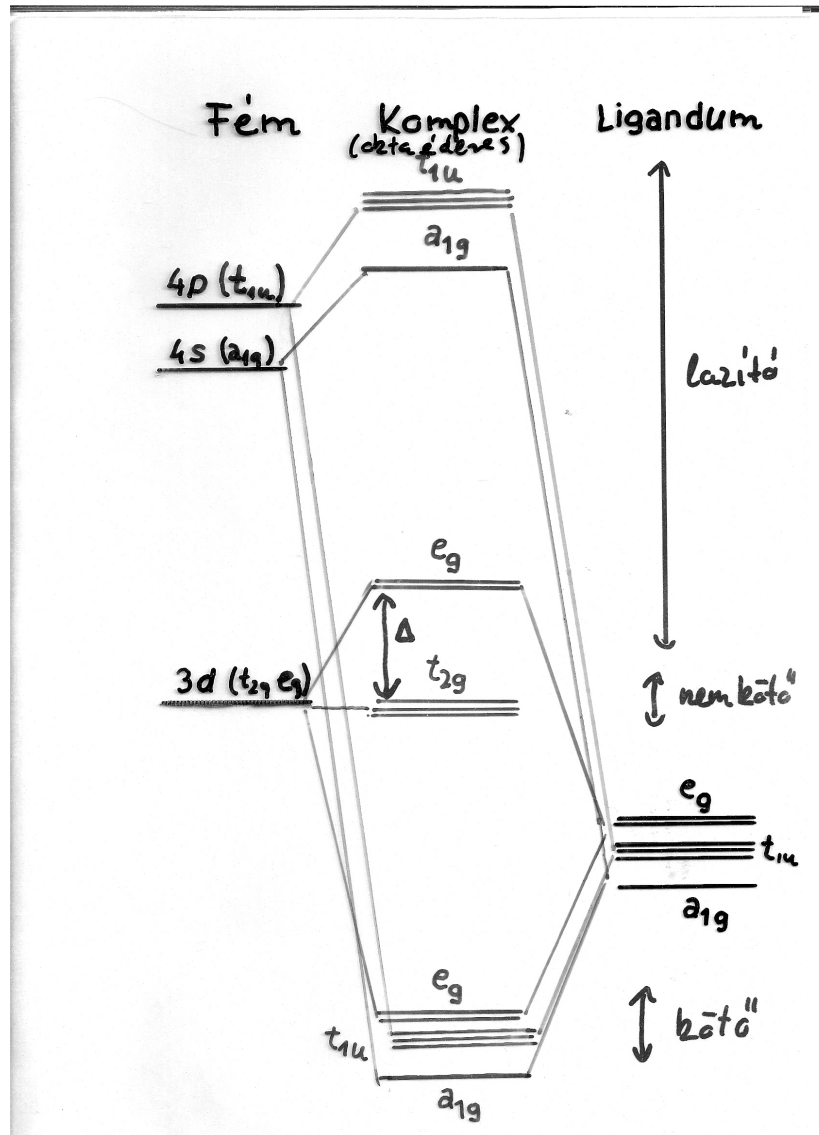
- atom (ion): 3d, 4s, 4p pályák $\rightarrow$
 $\Gamma(3d) = T_{2g} + E_g$
 $\Gamma(4s) = A_{1g}$
 $\Gamma(4p) = T_{1u}$

- ligandumok:
 $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_6) = A_{1g} + E_g + T_{1u}$

A ligandumok (6 db víz molekula) szimmetriaadaptált pályái:



Az MO diagramm:



Ezen kell 1+12 elektront elhelyezni:

Konfiguráció: $(a_{1g})^2, (t_{1u})^6, (e_g)^4, (t_{2g})^1$

Ugyanaz a betöltés, mint kristálytér-elmélet esetén, de:

- t_{2g} pálya energiája most nem változik az atomhoz képest, az e_g pályáé nő
- a stabilizációt tulajdonképpen a ligandum pályái energiájának csökkenése okozza

Másik példa: tetraéderes komplexek (pl. $[\text{CoCl}_4]^{2-}$, $[\text{Cu}(\text{CN})_4]^{3-}$):
 T_d pontcsoport karaktértáblája

T_d	I	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)
	7	4	1	0	0	2	

A felbontások:

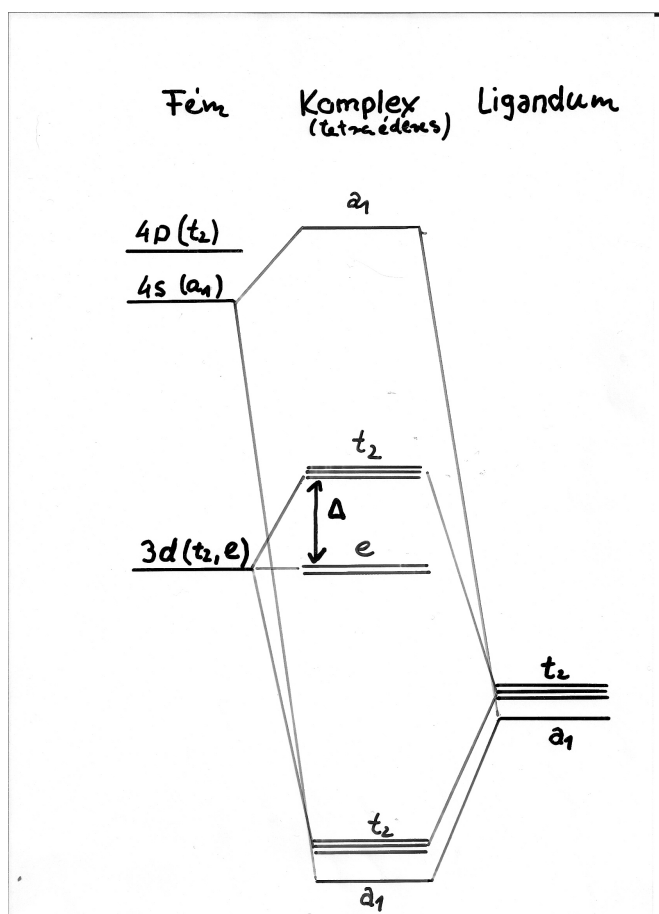
$$\Gamma(3d) = E + T_2$$

$$\Gamma(4s) = A_1$$

$$\Gamma(4p) = T_2$$

$$\Gamma(\text{ligandumok}) = A_1 + T_2$$

Az MO diagramm:



5. Szerkezetkutató módszerek elmélete

5.1. Általános elvek

5.1.1. Mi a szerkezetkutatás?

- szerkezeti képlet meghatározása (legnagyobb jelentőségű, de mi ennél többre törekszünk)
- geometria, konfiguráció, dinamikus szerkezet (összetartó erők, rezgések, stb.)

A módszerek csoportosítása:

- spektroszkópiai módszerek (szó szoros értelmében): elektromágneses sugárzás abszorpciója vagy emissziója
- diffrakciós módszerek
- ionizált állapotok vizsgálata (tömegspektroszkópia és rokon területek)

Rendkívül rohamosan fejlődő terület:

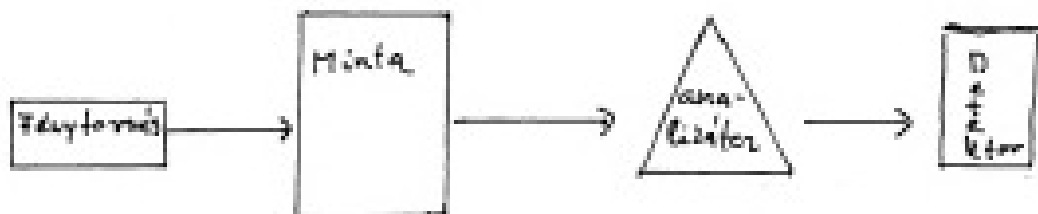
- meglévő módszerek tökéletesednek (pl. Fourier-technika)
- lézerek elterjedése
- új és „ravasz” elrendezések

5.1.2. A spektroszkópiai módszerek közös alapelvei

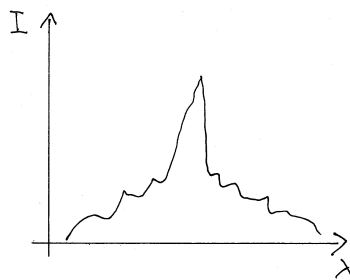
Folyamat minden esetben: anyag és elektromágneses tér kölcsönhatása

A spektrum fajtái: emisszió illetve abszorpció

A mérés elve:



A spektrum: relatív vagy abszolút intenzitás a hullámhossz (λ) vagy frekvencia (ν) vagy hullámszám (ν^*) függvényében:



- hullámhossz: jele: λ , mértékegysége: hosszúság, leggyakrabban nm (nanométer, $10^{-9}m$), vagy Å.
- hullámszám: jele: ν^* , mértékegysége: inverz hosszúság, leggyakrabban cm^{-1}
- frekvencia: jele: ν , mértékegysége inverz idő (Hz és ennek többszörösei), esetleg energia jellegű mennyiség is (pl. eV) szerepelhet, de ez nyilván $h\nu$ -t jelent.

Összefüggések:

$$\begin{aligned}\nu^* &= \frac{1}{\lambda} \\ \nu &= \frac{c}{\lambda}\end{aligned}$$

ahol c a fénysebesség.

Lambert-Beer törvény:

$$I = I_0 \exp(-\varepsilon n l)$$

ahol:

I_0, I : bejövő és kijövő intenzitás

ε : moláris abszorpciós koefficiens (extinkciós koefficiens)

n : koncentráció

l : rétegvastagság

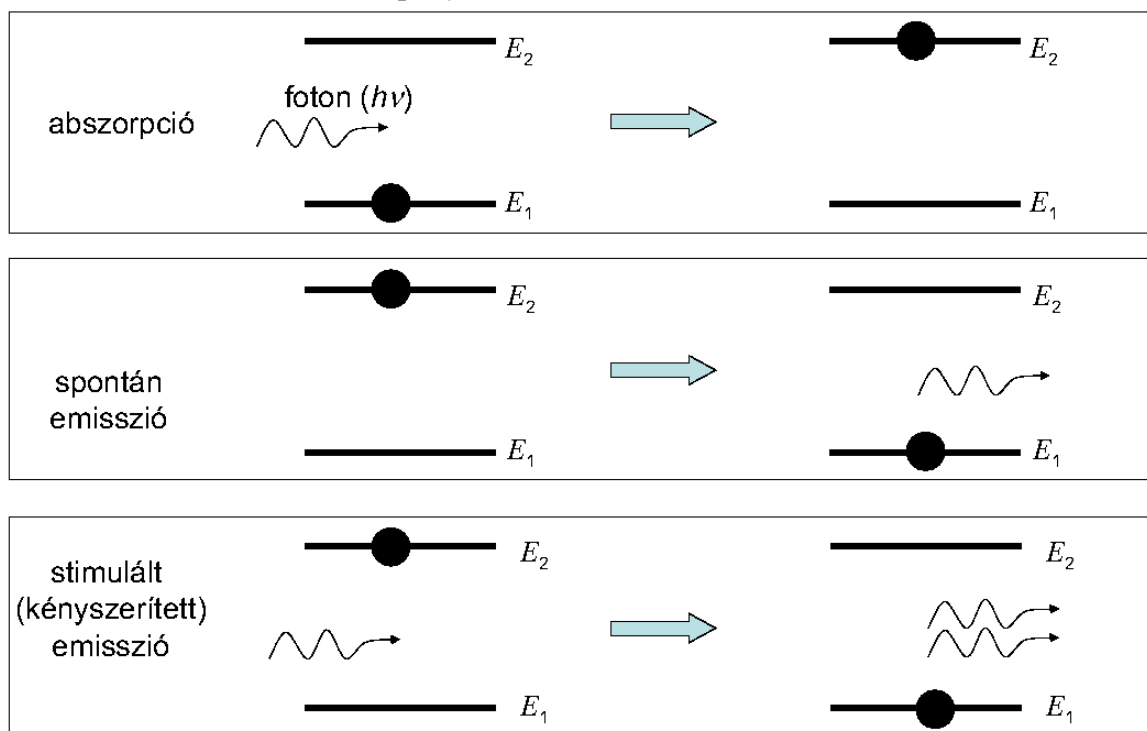
E szerint a mintában az intenzitás exponenciálisan csökken! A törvény kis intenzitásokra (ne okozzon átalakulást az anyagban) és vékony rétegekre érvényes.

Abszorbanca: $A = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \varepsilon n l$, tehát arányos a koncentrációval

Transzmittancia: $\frac{I}{I_0}$

Közös fizikai háttér:

Az anyag energiaszintjei közötti átmenet valósul meg: ha fotont nyel el, *abszorpció*, ha fotont bocsát ki *emisszió* történik.



Tehát az anyag energiája éppen a fénkvantum energiájával változik meg:

$$E_2 - E_1 = \Delta E = h\nu$$

Szintek jellemzésére az *energia* helyett gyakran a „*term*” értékeket használnak:

$$T_i = \frac{E_i}{hc}$$

Ezzel az „energiakülönbséget” hullámszámban kapjuk:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta E}{hc} = \nu^*$$

A spektrumot meghatározó tényezők:

- a) energiaszintek
erről nincs mint mondani, a fenti ábra alapján triviális
- b) kiválasztási szabályok

A spektrumot a kvantummechanika eszközeivel lehet leírni. Ehhez az anyag és az elektromágneses sugárzás kölcsönhatását kell leírni, melyhez a kvantum-elektrodinamika eszközeire van szükség. Közelítő képet kaphatunk azonban, ha a nem-relativisztikus kvantummechanikában (ezt tárgyaltuk eddig) a kölcsönhatást perturbációként tekintjük.

A levezetést mellőzve, az átmenet valószínűségére a következő kifejezést kapjuk:

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \left| \int \Psi_1^* \hat{K} \Psi_2 dv \right|^2$$

ahol

Ψ_1, Ψ_2 : A két állapot hullámfüggvénye

$\hat{K}$: A kölcsönhatás operátora, első közelítésben a dipólusmomentum

A fenti képletben szereplő integrált *átmeneti integrálnak* nevezzük.

Átmenet tehát akkor jön létre, ha az átmenti integrál nem tűnik el. Ha nem tűnik el, akkor azt mondjuk, hogy az átmenet *megengedett*, ellenkező esetben *tiltott*.

Mikor megengedett az átmenet? Csoportelméleti megfontolások alapján (ún. eltűnő integrálok tétele) az integrál csak akkor lehet nullától különböző, ha

$$\Gamma_{\Psi_1} \otimes \Gamma_{\Psi_2} \otimes \Gamma_{\hat{K}} = A_1 \oplus \dots$$

azaz a hullámfüggvények és a dipólusmomentum irreprezenseinek direktszorzata tartalmazza a teljesen szimmetrikus reprezentációt.

c) Az energiaszintek populációja

A b) alatti átmeneti valószínűség mindkét irányban azonos: **az indukált emisszió és abszorpció valószínűsége azonos!!**

De: Az energiaszintek betöltöttsége (populációja) eltérő, a Boltzmann-eloszlás alapján adható meg:

$$N_i = N_0 \exp\left(-\frac{\Delta E_i}{kT}\right)$$

ahol

ΔE_i : Az i -edik energiaszint relatív energiája ($\Delta E_i = E_i - E_0$)

k : Boltzmann-állandó

T : hőmérséklet

$N_0 = \sum_i N_i$, azaz az összes állapot száma

Az észlelt abszorpciót a populáció és az átmenet valószínűsége **együtt** szabják meg.

5.1.3. A lézerek

LASER: Light Amplification of Stimulated Emission of Radiation

Általában az alsó állapot betöltöttsége nagyobb $\Rightarrow$ abszorpció valószínűsége nagyobb, mint a stimulált emisszióé

De *populációinverzió* esetén a felső szint betöltöttsége nagyobb $\Rightarrow$ ekkor az emisszió lesz valószínűbb. Populációinverzió elérhető ún. pumpálással.

A lézerek jellemzői:

- *monokromatikusság*: a sugárzásban frekvencia csak nagyon szűk tartományt fed le.
- *koherencia*: a hullámok azonos fázisban vannak
- rendkívüli irányítottsága (kicsi sugárátmérő)
- nagy intenzitás

Elméleti Kémia I. (kv1n1lm1/1)

5.1.4. Az egyes spektroszkópai módszerek megkülönböztetése

Elv: a molekula belső szabadsági fokai *jó közelítésben* szeparálhatók:

$$\Psi_{tér}(\underline{r}, \underline{R}) \approx \underbrace{\Psi_{elektron,tér}(\underline{r}) \cdot \Psi_{mag,tér}(\underline{R})}_{\text{Bohr–Oppenheimer közelítés}} \approx \Psi_{elektron,tér}(\underline{r}) \cdot \Psi_{rezgés} \cdot \Psi_{forgás} \cdot \Psi_{transzláció}$$

ahol $\underline{r}$ és $\underline{R}$ az elektronok és a magok koordinátái (mint korábban).

Ha a hullámfüggvényre a fenti közelítés használható (legtöbbször teljesül), akkor az energia:

$$E_{tér} = E_{elektron} + E_{rezgés} + E_{forgás} + E_{transzláció}$$

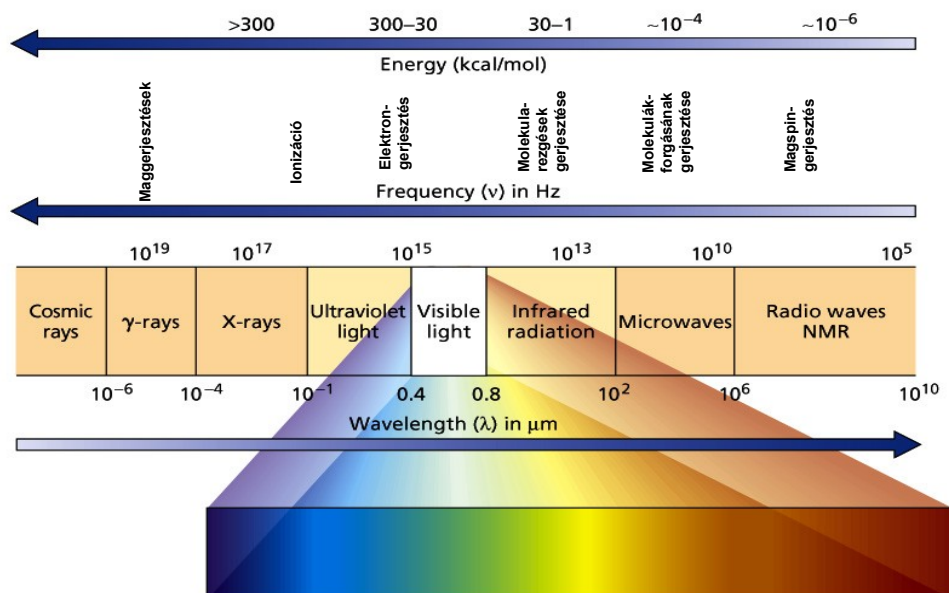
További szabadsági fok a **spin**, mely mind az elektronoknak, mind pedig a magoknak lehet:

$$E = E_{tér} + E_{elektron\ spin} + E_{mag\ spin}$$

A különböző járulékok különböző nagyságúak, ezért

⇒ az átmenetek az elektromágneses spektrum különböző tartományába esnek

⇒ különböző spektroszkópia módszerek tartoznak hozzá



5.2. Molekulák forgása – mikrohullámú spektroszkópia

5.2.1. Fizikai háttér:

Jelenség

A molekula mint forgó dipólus kölcsönhat az elektromágneses sugárzás elektromos térerő-komponensével. Tehát: csak dipólusmomentummal rendelkező molekulák adnak forgási színeképet.

Kvantummechanika leírás: a forgási probléma is kvantumos eredményt ad, az *energiaszintek kvantáltak*.

A forgási energiaszintek különbségei a mikrohullámú (Microwave – MW) tartományba esnek → mikrohullámú spektroszkópia

Kísérleti körülmények:

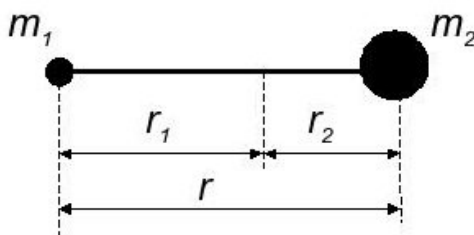
forrás: klystron, rezgő elektronok szolgáltatják a sugárzást

minta: gázhalmazállapotú, több méteres cellában.

információtartam: legpontosabb módszer a szabad molekulák geometriájának meghatározására.

5.2.2. Kéttomos molekulák forgása

A forgó molekula tehetetlenségi nyomatékkal rendelkezik:



$$I_B = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right) r^2$$
$$\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} r^2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r^2 \equiv m_{red} r^2$$

Matematikailag tehát: egyetlen m_{red} tömeg r sugarú pályán kering (v.ö. az elektron a H-atomban; itt egyszerűbb a probléma, mert r rögzített.)

Klasszikus energiaképlet (1. fizika): csak kinetikus energia van:

$$E = T = (1/2)I\omega^2,$$

ahol ω a szögsebesség (v.ö. a haladó mozgással, ahol $E = (1/2)mv^2$). Alternatíván, az impulzusmomentummal ($L = I\omega$):

$$E = T = \frac{1}{2I}L^2$$

A kvantummechanikában a megfelelő Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = \frac{1}{2I} \hat{L}^2$$

Ennek sajátértékei, azaz a forgási energiaszintek:

$$E_J^{rot} = \frac{1}{2I} J(J+1) \hbar^2 \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

ahol J a kvantumszám.

Az energiaszintek degeneráltak, azaz a forgási állapotok ($\Psi_{J,M}^{rot}$) még egy kvantumszámmal jellemezhetőek (M). Ennek lehetséges értékei:

$$M = -J, -J+1, 0, 1, \dots, J$$

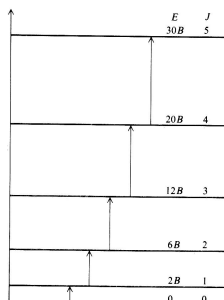
Tehát az E_J^{rot} forgási energiaszintek $(2J+1)$ -szeresen degeneráltak!

A spektrum szempontjából praktikusabb a "term"-értékek kifejezése:

$$T_J^{rot} = \frac{E_J^{rot}}{hc} = \frac{h}{8\pi^2 I c} J(J+1) \equiv B J(J+1)$$

ahol B a rotációs állandó, dimenziója hullámszám, pl. cm^{-1} -ben és arányos a tehetetlenségi nyomaték reciprokával: $B \sim 1/I$.

A képletből látszik, hogy az energiaszintek felfelé ritkulnak!

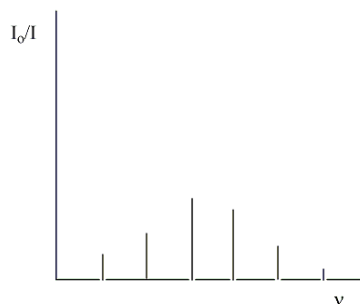


Nincs zéruspont-energia!!!

Kiválasztási szabályok:

- $\mu \neq 0$, azaz a molekula állandó dipólusmomentummal kell rendelkezzen;
- $\Delta J = \pm 1$, azaz átmenet csak szomszédos nívók között lehetséges.

A kétatomos molekulák forgási spektruma ezek szerint ekvidisztáns sávok:



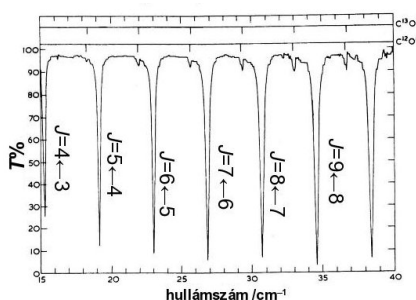
Az intenzitáseloszlás maximum görbe: a szintek populációja a Boltzmann-eloszlás szerint csökkenne, de ezt egy darabig még ellensúlyozza, hogy $(2J + 1)$ -szeresen degeneráltak.

A forgási spektrumból kapható információ:

A sávok távolságából: forgási állandó (B) $\rightarrow$ tehetetlenségi nyomaték (I) $\rightarrow$ kötэшossz (r), azaz általánosabban a molekula szerkezete!

A modell finomítása: fent "merev rotátor" -t tételeztünk fel. Valóságban a kötés többé-kevésbé rugalmas, ennek eredménye a centrifugális megnyúlás és rezgési effektusok. Ezek is fontos szerkezeti információt tartalmazhatnak.

Egy „igazi” spektrum:



5.2.3. Többatomos molekulák forgása

Csak az alapgondolatok:

A tehetetlenségi nyomatékot itt egy 3×3 -as mátrix írja le, ez az ún. tehetetlenségi tenzor, $\mathbf{I}$. Utóbbit a pontrendszert alkotó atomok tömege és helyzete határozza meg.

Az impulzusmomentum-vektor: $\underline{L} = \mathbf{I}\omega$.

$\mathbf{I}$ -t diagonalizálva egy speciális koordinátarendszerhez jutunk, ennek tengelyei az a , b , c főtengelyek, $\mathbf{I}$ diagonális elemei pedig az I_a , I_b , I_c főtehetetlenségi nyomatékok.

$\underline{L}$ és ω nem feltétlenül esik egybe (kényszerszermozgás), de szabad forgás csak a főtengelyek körül lehetséges.

A főtengely-rendszerben a mozgás Hamilton-operátorában a , b , c irányok szeparálódnak, nincsenek kereszttagok, így:

$$\hat{H} = \frac{1}{2I_a} \hat{L}_a^2 + \frac{1}{2I_b} \hat{L}_b^2 + \frac{1}{2I_c} \hat{L}_c^2$$

A molekulák 3 fő csoportba sorolhatók, a színkép jellege döntően függ ettől:

- gömbi pörgettyű: $I_a = I_b = I_c$;
- szimmetrikus pörgettyű: $I_a \neq I_b = I_c$;
- aszimmetrikus pörgettyű: $I_a \neq I_b \neq I_c$.

Példák:

- gömbi pörgettyű: CX_4 , de mivel nincs dipólusmomentum, nincs spektrum.
- szimmetrikus: a MW-spektroszkópusok kedvence, még viszonylag könnyen kiértékelhető spektrum; pl. NH_3 , CH_3X , C_6H_6 (Az utóbbinál nincs dipólusmomentum csak Raman-ban mérhető (l. a forgásoknál)).
- aszimmetrikus pörgettyű: minden Abel-csoportba tartozó molekula (nincs degeneráció), például H_2O .

Összefoglalva:

A forgási (mikrohullámú - MW) spektroszkópia szolgáltatja a legpontosabb molekula-geometriákat, *kis* és *szimmetrikus* molekulákra, *gáz halmazállapotban*.

További részlet: elektromos térben a szintek felhasadnak (Stark-effektus), a dipólusmomentum legpontosabb mérése gázokban.

5.3. Molekulák rezgése – IR- és Raman-spektroszkópia

5.3.1. Fizikai háttér

Jelenség

A molekulán belül az atomok állandó rezgésben vannak, rezgési állapotuk kvantált. Az állapotok között átmenetet figyelhetünk meg:

- közvetlenül: IR tartományban, melynek frekvenciája megfelel a rezgések energiakülönbségének.
- indirekt módon az elnyelt és kisugárzott látható vagy UV fény frekvenciakülönbsége alapján: Raman-effektus (rugalmatlan szórás)

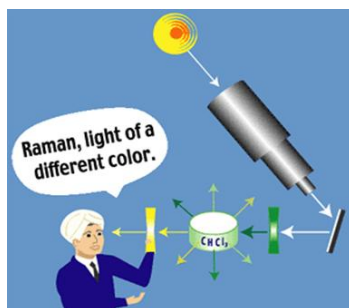
Az IR (infravörös – infrared) mérés elve

Klasszikus elrendezés (ábra lásd a bevezetést fentebb):

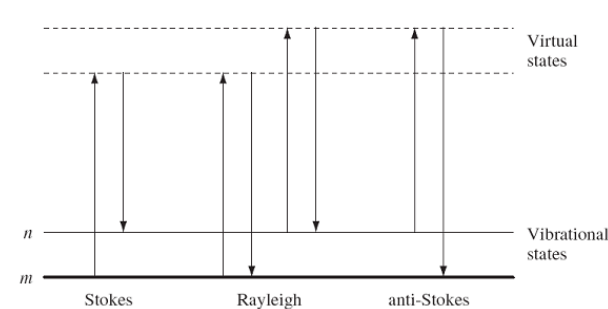
- forrás
- minta: film vagy oldat és még szilárd is
- monokromátor: optikai rács vagy prizma
- detektor: termoelem

Mintatartó és monokromátor anyaga: alkálihalogenid (pl. KI) mert üveg elnyel IR-ben.

Raman-mérés elve



Effektus: rugalmatlan szórás; a gerjesztés elektrongerjesztett állapotba visz, innen kisugározva az alapállapot egy gerjesztett rezgési szintjére érünk.

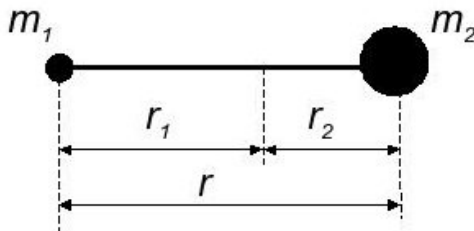


Általában a bal oldali (Stokes) elvet használja a Raman spektroszkópia. Kísérleti eszközök: mint a látható és UV spektroszkópia esetén (l. később).

5.3.2. Kéttatomos molekulák rezgései

Klasszikus leírás

Modell: harmonikus oszcillátor, melyre érvényes a Hooke-törvény: $F = -kx$, ahol F az erő, x a kitérítés, k a rugóállandó.



$$F = -k(r - r_e)$$

ahol r_e a két atom egyensúlyi kötéstávolsága, r az aktuális (rezgés során változó) kötéstávolság.

Az első (1) atom mozgása:

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -k(r - r_e)$$

r_1 -et r -rel fejezzük ki:

$$\begin{aligned} m_1 r_1 &= m_2 r_2 & r_1 + r_2 &= r \\ \downarrow & & & \\ r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \end{aligned}$$

és így

$$\underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{m_{red}} \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \underbrace{(r - r_e)}_q$$

mivel r_e állandó, ezért $\frac{d^2 r}{dt^2} \equiv \ddot{r} = \ddot{q}$:

$$m_{red} \ddot{q} = -kq$$

Ennek megoldása (volt fizikából?):

$$q = q_0 \sin(2\pi\nu t + \phi)$$

ahol ϕ tetszőleges fázis, és

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{red}}}$$

a rezgés frekvenciája.

A kétatomos molekula rezgése úgy tekinthető, mint az m_{red} tömeg rezgése az egyensúly körül; a kötéshossz pillanatnyi megváltozását (q) szinuszos függvény írja le, a frekvenciát az m_{red} tömeg és a k erőállandó határozza meg.

A rendszer energiája *folytonos*, bármekkora lehet (0 is!)

Kvantumos leírás harmonikus közelítésben:

Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{T} + \hat{V} \\ V &= \frac{1}{2}kq^2 (= -\int F = \int kq)\end{aligned}$$

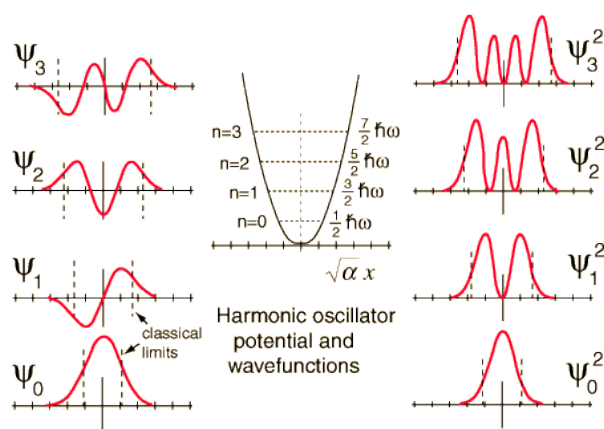
A Schrödinger-egyenlet megoldásából (harmonikus oszcillátor):

$$E_v = h\nu \left(v + \frac{1}{2} \right) \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Tehát az energia:

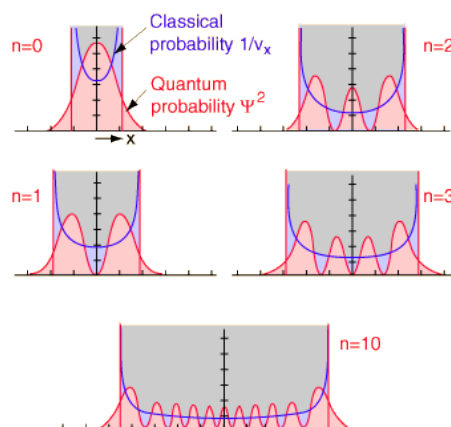
- kvantált
- ekvidisztáns ($E_{v+1} - E_v = h\nu$)
- van zéruspont-energia ($\frac{1}{2}h\nu$)

Hullámfüggvény:



(Az ábrán: $\omega = 2\pi\nu$ az ún. körfrekvencia.)

Az ábrán láthatók a tartózkodási valószínűségek ($|\Psi|^2$) is. Ezeket összehasonlíthatjuk az azonos energiához tartozó klasszikus megtalálási valószínűségekkel (az ábrán szereplő n a mi v kvantumszámunk):



Mi látható ebből:

- a legalacsonyabb energiájú klasszikus állapot esetén a $q = 0$ a legvalószínűtlenebb, mert itt halad leggyorsabban a rezgő részecske. A kvantumos esetben viszont a legnagyobb valószínűség éppen $q = 0$ -nál van. (Ez az ellentmondás feloldható, ha nem azonos energiájú rendszereket hasonlítjuk össze, hanem a kvantumos és klasszikus alapállapotot. Utóbbi esetben nincs rezgés, teljes valószínűséggel $q = 0$ áll fenn. Ehhez már hasonlít a kvantumos alapállapot, ahol szintén a $q = 0$ a legvalószínűbb.)
- $v = 2$ -től kezdve nem igen hasonlít a két eloszlás, a klasszikus esetben a valószínűség maximuma továbbra is a fordulópontnál van, míg a kvantumos esetben több maximum is található.
- $v = 10$ esetén azonban már jól látható, hogy magas kvantumszámokra határesetben hasonlít a kvantumos és klasszikus eloszlás (korrespondencia elv).

A rezgési hullámfüggvény alakjának még nagy szerepe lesz az elektrongerjesztési spektrum finomzerkezetének leírásában.

Kiválasztási szabályok

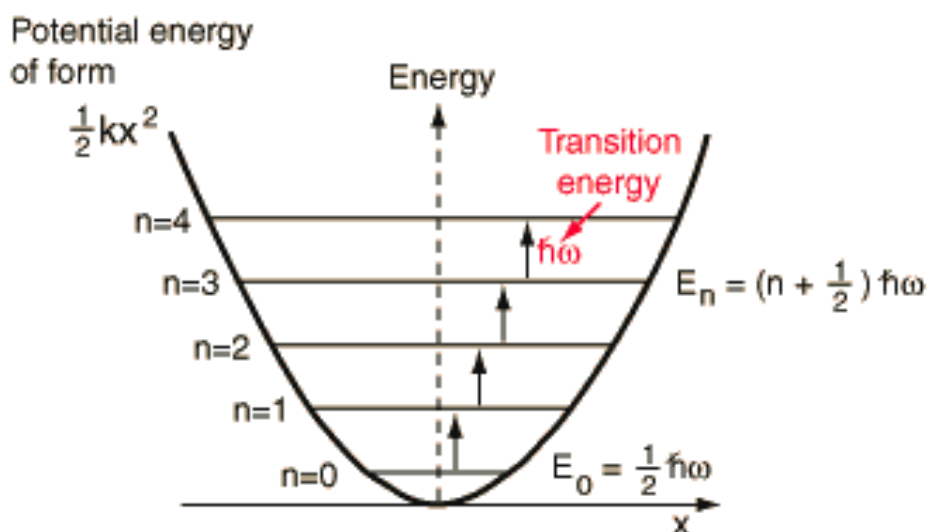
Átmenet valószínűsége a v és v' állapotok között IR esetben:

$$P_{v,v'} = |\langle \Psi_v | \hat{\mu} | \Psi_{v'} \rangle|^2$$

ahol $\hat{\mu}$ a dipólus operátor.

A részletek mellőzésével, a valószínűség nem nulla, ha

- $\frac{d\mu}{dq} \neq 0$, azaz a rezgési koordináta mentén változik a dipólusmomentum
- $v' = v \pm 1$, azaz a rezgési kvantumszám egyet változik



Azaz, a spektrumban csak egyetlen vonal jelenik meg, és $\Delta E = h\nu$!

Vegyük észre, hogy homonukleáris kétatomos molekulának *nincs IR spektruma!!*

Átmenet valószínűsége a v és v' állapotok között Raman esetben:

$$P_{v,v'} = |\langle \Psi_v | \hat{\alpha} | \Psi_{v'} \rangle|^2$$

ahol $\hat{\alpha}$ a polarizálhatóság operátora.

A részletek mellőzésével, a valószínűség nem nulla, ha

- $\frac{d\alpha}{dq} \neq 0$, azaz a rezgési koordináta mentén változik a polarizálhatóság
- $v' = v \pm 1$, azaz a rezgési kvantumszám egyet változik

Azaz, a spektrumban csak egyetlen vonal jelenik meg, és $\Delta E = h\nu$!

Vegyük észre, hogy homonukleáris kétatomos molekulának is *van Raman-spektruma!!*

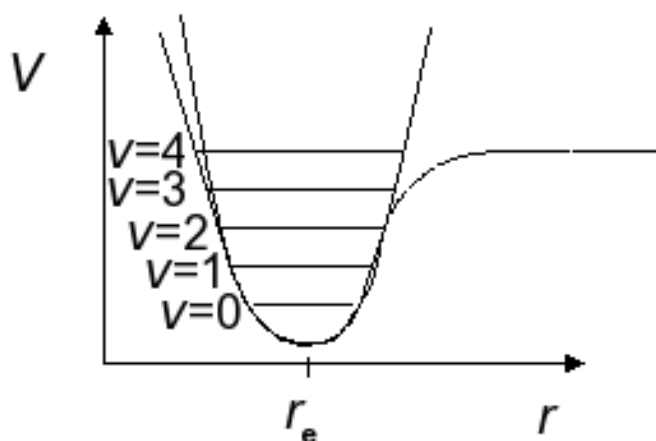
Illusztráció:

HX	HF	HCl	HBr	HI
ν (cm ⁻¹)	3958	2886	2559	2230

Szerkezeti információ: $\nu \rightarrow k$, azaz a frekvenciából erőállandóra, kötése erősségre következtetünk. Itt: legerősebb a HF kötés.

Anharmonicitás

Eddig a harmonikus közelítést használtuk. Valóságban azonban a molekulákban lévő potenciál eltér a harmonikustól:



Ez leginkább az ún. Morse-potenciállal adható meg:

$$V(q) = D_e(1 - \exp(-\alpha q))^2$$

ahol D_e a disszociációs energia (a minimumtól mérve), α egy állandó.

Következmények:

- az energiaszintek nem lesznek ekvidisztánsak – felfelé sűrűsödnek
- $\Delta v = \pm 1$ nem lesz szigorún érvényes – megjelennek az úgynevezett *felhangok* is $\sim 2\nu$, $\sim 3\nu$ stb értéknél.

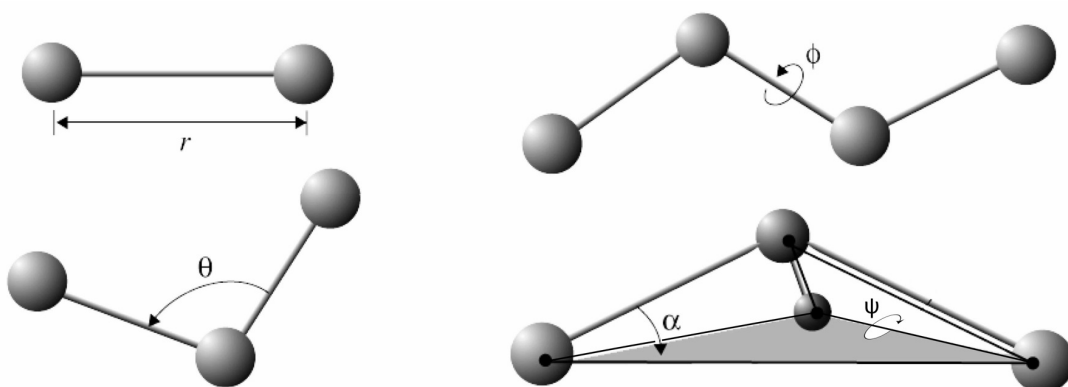
Ezek az effektusok azonban gyengék, a rezgési spektrum jól közelíthető a harmonikus képpen: egy erős sáv mellett néhány gyenge jelenik csak meg.

5.3.3. Többatomos molekulák rezgései

Belső koordináták

Egy N atomos molekulának $3N - 6$ (lineáris esetben $3N - 5$) belső szabadsági foka van. Ezért célszerű a $3N$ atomi Descartes-koordináta helyett belső koordinátákat használni, melyek a kémiai szemléletet is tükrözik. Fő típusok:

- kötés nyújtás (stretching)
- kötés hajlítás (bending)
- torziós szögek (torsion)
- síkból kimozdulás (out-of-plane)



Példák (ábrával!):

víz: 3 db kell, r_1, r_2, α

ammónia: 6 db kell, többféle választás lehetséges, pl. $r_1, r_2, r_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, de pl. az inverzió leírásához célszerű az *out-of-plane* koordináta használata.

etilén: 12 db kell, lehetséges választás: öt *stretching*, négy síkbeli *bending* (figyelem: további kettő redundáns lenne!), τ_{3126} torzió, két *out-of-plane* (CH_2 csoportok).

Normálkoordináták

Az elméletből kiderül, hogy speciális, a rendszerre jellemző koordináták választása esetén a rezgési Hamilton-operátor $3N-6$ ($3N-5$) független oszcillátor összegére bomlik:

$$\hat{H} = \sum_i \hat{h}(Q_i)$$

Itt Q_i jelöli e speciális koordinátákat, melyeket *normálkoordinátáknak* nevezzük.

A normálkoordináták a belső koordinátákból épülnek fel (lineárkombinációk), így ezek az egész molekulára kiterjed(het)nek.

Mivel a Hamilton-operátor összeg alakú, ezért

- a hullámfüggvény az egydimenziós függvények szorzata
- a teljes rezgési energia az egyes oszcillátorok energiájának összege

Így:

$$E(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_i^n h\nu_i(v_i + \frac{1}{2}) \quad (95)$$

ahol ν_i az i -edik normálrezgés frekvenciája, v_i a megfelelő kvantumszám.

A zéruspont-energia tehát: $E_{ZPE} = \frac{h}{2} \sum_i \nu_i$.

Kiválasztási szabályok:

Mellőzve a levezetést:

- $\Delta v_i = \pm 1$ és $\Delta v_{j \neq i} = 0$, azaz egyszerre csak egy oszcillátor kvantumszáma változhat egy egységgel.

- $\frac{d\mu}{dQ_i} \neq 0$ (IR) illetve $\frac{d\alpha}{dQ_i} \neq 0$ (Raman).

Kiválasztási szabályok szimmetria szerint

A rezgési alapállapot hullámfüggvénye *totálszimmetrikus*: $\Gamma_{\Psi_{0,0,0,\dots,0}} = A_1$

Az egyszeresen gerjesztett állapot hullámfüggvénye szimmetriája: $\Gamma_{\Psi_{0,0,0,1,\dots,0}} = \Gamma_{Q_i}$, azaz a gerjesztett rezgéshez tartozó normálkoordináta szimmetriája.

Egy kiválasztott rezgésre az átmeneti integrál IR spektrum esetén:

$$\langle \Psi_{0,0,0,\dots,0} | \mu | \Psi_{0,0,0,1,\dots,0} \rangle \neq 0$$

akkor teljesül, ha $\Gamma_\mu = \Gamma_{Q_i}$, mivel a rezgési alapállapot totálszimmetrikus. Tehát egy normálmódus akkor lesz IR aktív, ha szimmetriája megegyezik a dipólusmomentum (egy komponensének) szimmetriájával!

Ramannál pedig:

$$\langle \Psi_{0,0,0,\dots,0} | \alpha | \Psi_{0,0,0,1,\dots,0} \rangle \neq 0$$

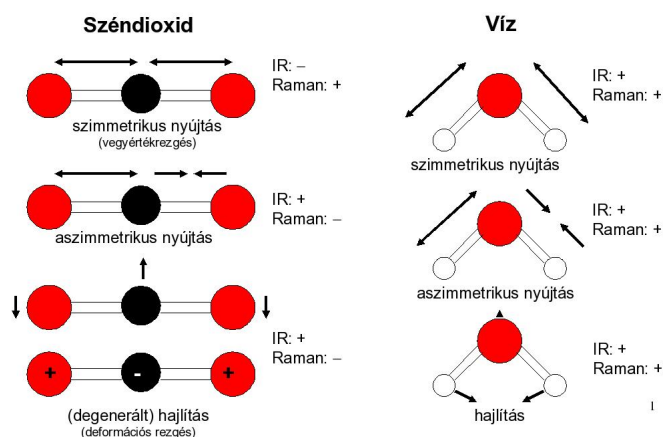
mely akkor teljesül, ha $\Gamma_\alpha = \Gamma_{Q_i}$. Tehát egy normálmódus akkor lesz Raman aktív, ha szimmetriája megegyezik a polarizáció (tenzor egy komponensének) szimmetriájával!

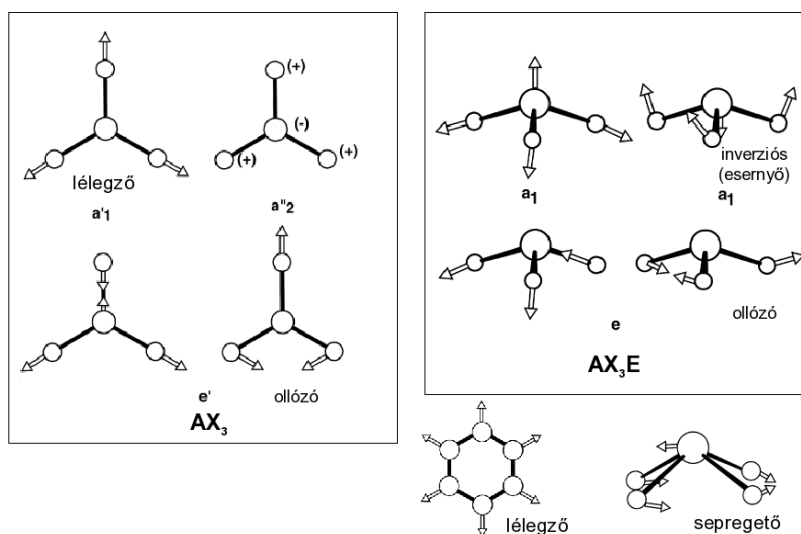
Figyelembe véve az anharmonicitást is: felhangok, kombinációs sávok jelennek meg.

A spektrumban tehát

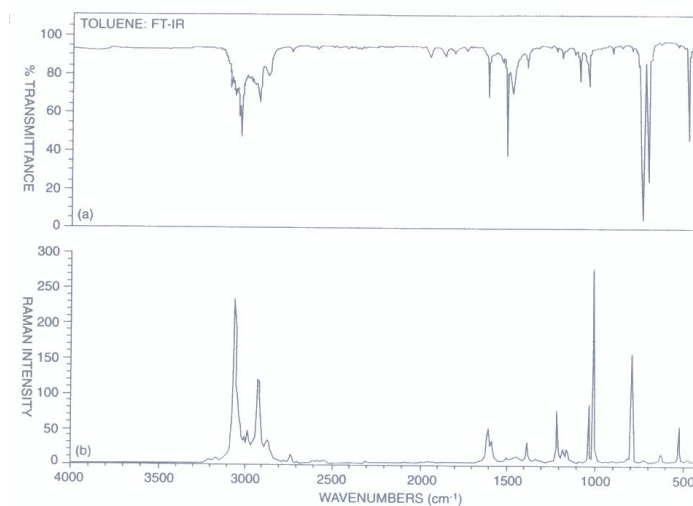
- dominálnak a szimmetriamegengedett normálmódusoknak megfelelő $0 \rightarrow 1$ átmenetek. Ezeket *fundamentális* sávoknak hívjuk.
- anharmonicitás miatt megjelennek *felhangok* és ún. *kombinációs sávok* is. Ez utóbbiban egyszerre kettő, esetleg több normálmódus gerjesztődik.
- az IR és Raman kiválasztási szabályok különbsége okán a két spektrum különbözik: bizonyos sávok csak egyikben vagy másikban, intenzitásviszonyok különbözőek.

Jellemző normálkoordináták:





Példaként álljon itt a toluol molekula IR és Raman spektruma:



5.3.4. A rezgési spektroszkópia gyakorlati alkalmazása

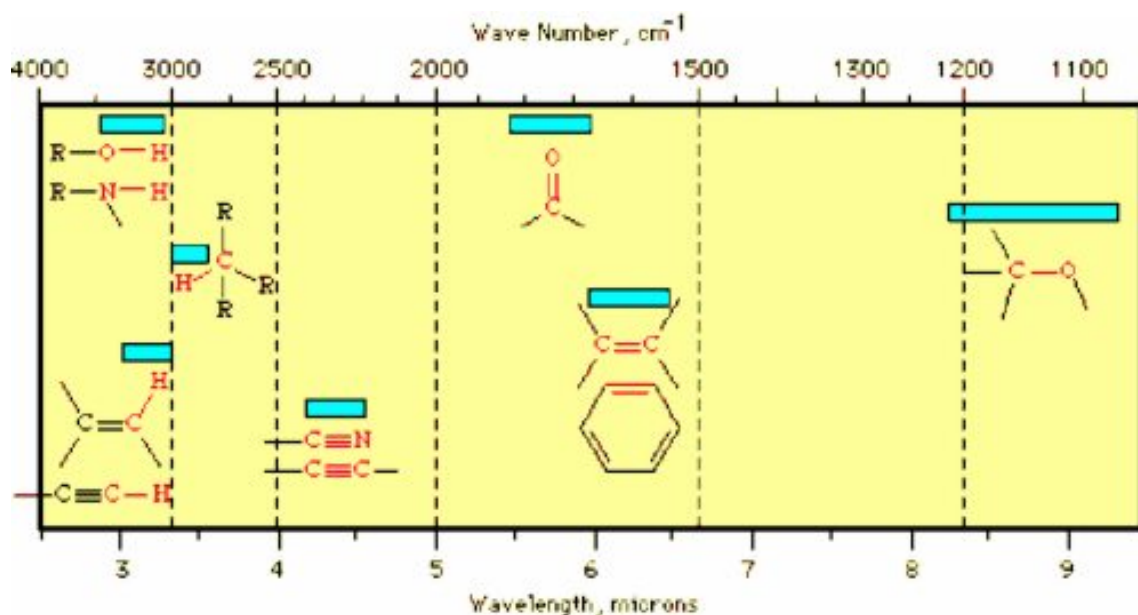
- azonosítás
- jellemző csoportok
- kvantitatív jellemzés

Azonosítás

Elméleti értelmezés nélkül az ún. „ujjlenyomat” tartományt hasonlítják össze adatbázisokban tárolt spektrumokkal. Az ujjlenyomat tartomány az alacsony frekvenciához ($< 500 \text{ cm}^{-1}$) tartozó spektrumrészletet értjük, ahol főleg deformációs rezgések sávjai található, melyek rendkívül érzékenyek a molekulában lévő kölcsönhatásokra.

Jellemző csoportok

Bár a normálrezgések a molekula bármely atomjának mozgását tartalmazzák, ezeket gyakran egy bizonyos belső koordináta dominálja. Ennek megfelelően az azonos belső koordináta által dominált rezgések különböző molekulák esetén a spektrum azonos tartományában jelennek meg. Ezt a következő ábra szemlélteti (célszerű megjegyezni!):



Tehát a rezgési spektroszkópiát lehet molekularészletek azonosítására használni.

Kvantitatív jellemzés

Matematikai eszközökkel a frekvenciákból az erőállandók meghatározhatók, amellyel a kötések erőssége jellemezhető. Egy mérés általában nem szolgáltat elég információt, ezért izotopomerek mérése is szükséges. Nagyon fontos szerepe van az elméleti módszereknek!

5.4. Elektronspektroszkópia

Két módszer:

UV-VIS spektroszkópia: $M + h\nu \rightarrow M^*$

PES, XPS (ESCA): $M + h\nu \rightarrow M^+ + e^-$

5.4.1. UV-VIS – ultraibolya-látható spektroszkópia

Alapelvek: 1. fizikai kémia és műszeres analitika

	látható	400-800 nm
Tartományok:	UV	200-400 nm
	VUV	< 200 nm

	forrás:	volfrám izzó, H-lámpa, stb.
A műszer viszonylag egyszerű:	optika:	kvarc
	detektor:	fotocella

Fizikai háttér: átmenet két elektronállapot között $\Rightarrow$ „elektronszínkép”

De: Az elektron energiaszintekre ráakodnak a rezgési energiaszintek is, tulajdonképpen az $E = E^{el} + E^{rezg}$ összeget vizsgáljuk.

Elmélet: minden, amit a félév elején az elektronszerkezettel, az imént pedig a rezgésekkel kapcsolatban tanultunk

Kiválasztási szabályok:

Az i és a j állapotok közötti átmenet valószínűségét itt is az *átmeneti integrál* határozza meg:

$$P_{i \leftrightarrow j} = \int \Psi_i^* \hat{\mu} \Psi_j d\tau$$

ahol Ψ most az elektronkoordinátákat (tér és spin) valamint a rezgést tartalmazza (forgást, translációt a korábbiak szerint leválasztottuk):

$$\Psi = \Psi^{rezg} \cdot \Psi^{el} = \Psi^{rezg} \cdot \Psi^{el \text{ tér}} \cdot \Psi^{spin}$$

így:

$$\int \Psi_i^* \hat{\mu} \Psi_j d\tau = \int \Psi_i^{rezg*} \Psi_j^{rezg} d\tau_{rezg} \cdot \int \Psi_i^{spin*} \Psi_j^{spin} d\tau_{spin} \cdot \int \Psi_i^{el \text{ tér}*} \hat{\mu} \Psi_j^{el \text{ tér}} d\tau_{el \text{ tér}}$$

Azaz a kiválasztási szabályoknak három összetevője van:

$\int \Psi_i^{rezg*} \Psi_j^{rezg} d\tau_{rezg}$: ún. Franck-Condon-faktor: l. később

$\int \Psi_i^{spin*} \Psi_j^{spin} d\tau_{spin}$: átmenet csak azonos multiplicitású állapotok között lehetséges

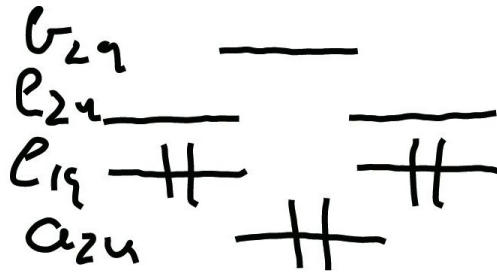
$\int \Psi_i^{el \text{ tér}*} \hat{\mu} \Psi_j^{el \text{ tér}} d\tau_{el \text{ tér}}$: szimmetria határozza meg: „ $\Gamma_i \otimes \Gamma_\mu \otimes \Gamma_j$ ”

Példa: benzol HOMO-LUMO gerjesztés (1. Hückel-elmélet)

Character table for D _{6h} point group														
	E	2C ₆	2C ₃	C ₂	3C' ₂	3C'' ₂	i	2S ₃	2S ₆	σ _h	3σ _d	3σ _v	Linear, rotations	Quadratic
A _{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		x ² +y ² , z ²
A _{2g}	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	R _z	
B _{1g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		
B _{2g}	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1		
E _{1g}	2	1	-1	-2	0	0	2	1	-1	-2	0	0	(R _x , R _y)	(xz, yz)
E _{2g}	2	-1	-1	2	0	0	2	-1	-1	2	0	0		(x ² -y ² , xy)
A _{1u}	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
A _{2u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	z	
B _{1u}	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1		
B _{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E _{1u}	2	1	-1	-2	0	0	-2	-1	1	2	0	0	(x, y)	
E _{2u}	2	-1	-1	2	0	0	-2	1	1	-2	0	0		

Alapállapot:

zárt héjú konfiguráció:



→ totalszimmetrikus szinglett, $^1A_{1g}$

Gerjesztés:

Π -elektron konfigurációval: $(a_{2u})^2(e_{1g})^4 \rightarrow (a_{2u})^2(e_{1g})^3(e_{2u})^1$

Az ebből levezethető állapotok:

$^1B_{2u}, ^1B_{1u}, ^1E_{1u}$ (szinglett), vagy $^3B_{2u}, ^3B_{1u}, ^3E_{1u}$ (triplett)

Kiválasztási szabályokat alkalmazva:

- Spin szabály: $\int \Psi_i^{spin*} \Psi_j^{spin} d\tau_{spin}$: átmenet csak azonos multiplicitású állapotok között lehetséges

$^1A_{1g} \rightarrow ^1B_{2u}, ^1B_{1u}, ^1E_{1u}$, de triplett állapotok nem érhetők el!

- Szimmetriaszabály: $\int \Psi_i^{el\ tér*} \hat{\mu} \Psi_j^{el\ tér} d\tau_{tér}$:

$$A_{1g} \otimes \Gamma_\mu \otimes \Gamma_j = A_{1g} \oplus \dots \rightarrow \Gamma_\mu \otimes \Gamma_j = A_{1g} \rightarrow \Gamma_\mu = \Gamma_j$$

A dipólusmomentum komponensek szimmetriája (l. D_{6h} karaktertábla):

$$\Gamma_{\mu_x}, \Gamma_{\mu_y} : E_{1u} \quad \Gamma_{\mu_z} : A_{2u}$$

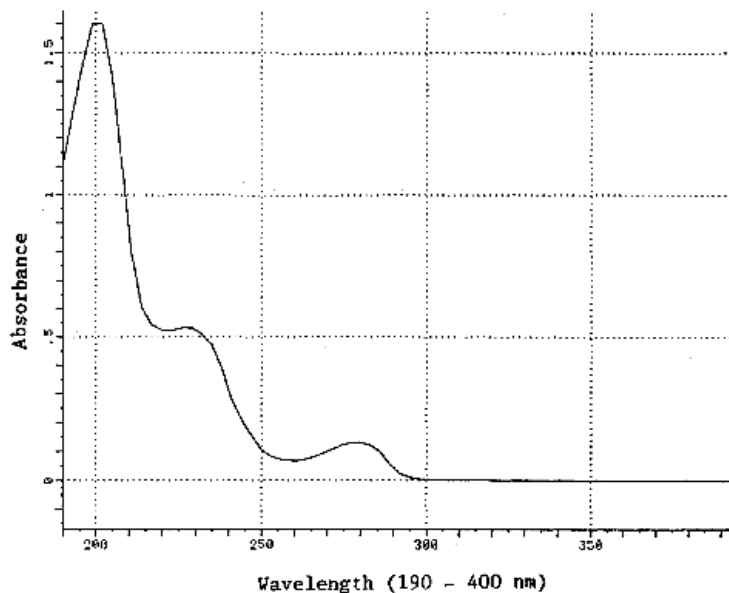
Tehát szimmetria alapján csak a ${}^1A_{1g} \rightarrow {}^1E_{1u}$ átment lehetséges.

Az átmenetek osztályozhatók tehát:

	szimmetria megengedett	szimmetria tiltott
spin megengedett	${}^1E_{1u}$	${}^1B_{2u}, {}^1B_{1u}$
spin tiltott	${}^3E_{1u}$	${}^3B_{2u}, {}^3B_{1u}$

Benzol UV spektruma:

	gerjesztés	hullámhossz (Å)	extinkciós koefficiens
${}^1A_{1g} \rightarrow$	${}^1E_{1u}$	1830	47000
	${}^1B_{1u}$	2050	7000
	${}^1B_{2u}$	2550	220

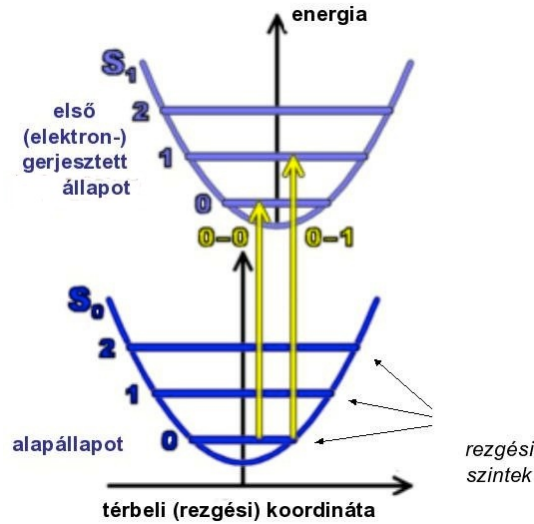


A tripllett állapotok egyáltalán nem látszanak $\rightarrow$ a spintiltás erősebb
Szimmetriatiltás (részleges) feloldása: rezgési állapotok figyelembevételével

Rezgési finomszerkezet, a Franck-Condon-elv

A rezgési nívók ráakódnak az elektronnívókra:

$$E = E_{el} + E_{rezg}$$



Ezeket az ún. vibronikus szinteket két típusú „kvantumszám” határozza meg:

- az elektron energiaszintet jellemző ($S_0, S_1, \dots$)
- a rezgési szintet jellemző ($v = 0, 1, 2, \dots$)

A megfelelő hullámfüggvénynek (állapotnak) is két indexe van: $\Psi_{i,v}$

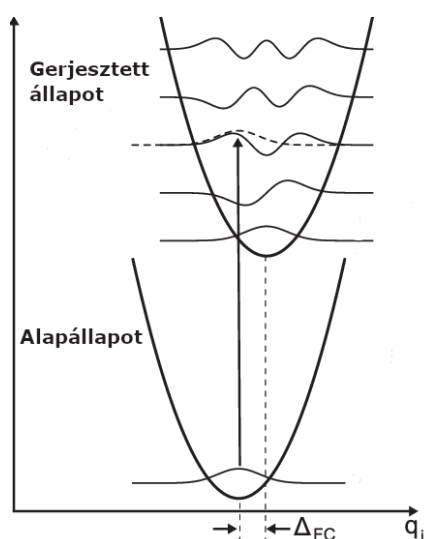
Az átmenetet jelölhetjük tehát $\Psi_{i,v} \rightarrow \Psi_{j,v'}$

Kérdés: az egyes, ún. vibronikus átmeneteknek milyen a relatív intenzitása?

Átmeneti integrál:

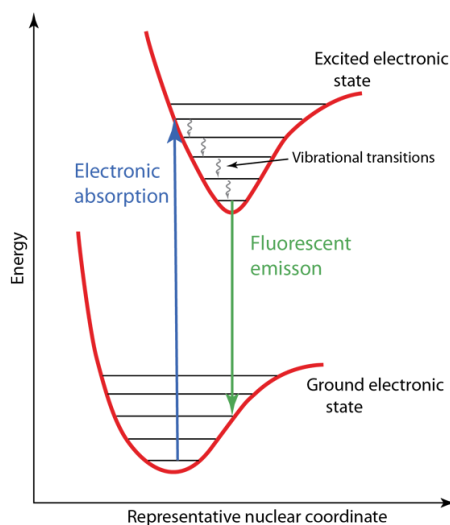
$$\int \Psi_{i,v}^* \hat{\mu} \Psi_{j,v'} d\tau_{rezg} d\tau_{el} = \int \Psi_{i,v}^{rezg*} \Psi_{j,v'}^{rezg} d\tau_{rezg} \cdot \int \Psi_i^{el*} \hat{\mu} \Psi_j^{el} d\tau_{el}$$

A második tag a különböző rezgési szintek közötti átmenetekre azonos, tehát csak az első tag befolyásolja: az egyes átmenetek valószínűségét az alapállapot, illetve a gerjesztett állapot rezgési hullámfüggvényeinek átfedése határozza meg. Ez az ún. Franck-Condon-elv



Az ábrán látható esetben spektrumban a 0-2 sáv lesz a legintenzívebb, 0-1 és 0-3 kisebb, 0-0 és 0-4 még kisebb intenzitású.

Kvalitatíven: a magmozgás lassú az elektronállapothoz képest $\rightarrow$ ún. vertikális átmenetek valósulnak meg olyan rezgési szintekre, melyben a kiindulási (alapállapotbeli) magtávolság valószínűsége nagy.



Kihhasználva a klasszikus képet, hogy a legnagyobb valószínűséggel a rezgő rendszer a fordulópontnál tartózkodik, a fenti ábrán látható kék nyíllal lehet megállapítani a domináns elnyelési rezgési átmenetet. (Ugyanez emisszió esetén a zöld nyíl (l. később).)

Részletesebben két atomos molekulák esetében²:

a) A rezgési potenciálfüggvény keveset változik a gerjesztés során (pl. nemkötő elektron gerjesztése)

Ábra potenciálok és spektrum

²A rezgési hullámfüggvények alakja látható az 5.1 fejezetben

Ilyenkor a rezgési hullámfüggvények a két állapotban közel azonosak, azért a $v = 0 \rightarrow v' = 0$ átmenet lesz a legvalószínűbb (ún. $0 \rightarrow 0$ átmenet)

- b) A két potenciálgörbe erősen különbözik, az egyensúlyi magtávolság is különbözik:
 Ábra potenciálok és spektrum

Ilyenkor valamelyik gerjesztett rezgési hullámfüggvénnyel lesz a legnagyobb az átfedés, ez lesz a legerősebb sáv, de tőle mind balra, mind pedig jobbra egyre gyengülő *progressziók* jelennek meg. A fenti ábrán pl. a $0 \rightarrow 2$ átmenet a legvalószínűbb. Az ilyen átmenet burkolói a tipikus UV sávok, amellyel pl. műszeres analitikából találkozhattak.

- c) Disszociáció
 Ábra potenciálok és spektrum

A spektrum a disszociációnak megfelelő energia felett folytonossá válik, hiszen a fragmenesek kinetikus energiája bármely érték lehet.

Gyakorlati UV-spektroszkópia

Jelentőség:

- kvantitatív analízis
- szerkezetkutatás: jellemző kromofórok kimutatása

Kromofór: olyan molekularészlet (csoport, kötés), mely könnyen gerjeszthető elektronokat tartalmaz.

A kromofórok alapján különböztetünk meg sávtípusokat:

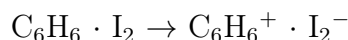
1. $\pi \rightarrow \pi^*$ – kromofór: kettőskötés v. Π -rendszer
 a kötő π pályáról nemkötő π^* pályára gerjesztünk

	etilén	butadién	hexatrién	oktatetraén
$\lambda(\text{\AA})$	1620	2170	2510	3040

ún. batokróom eltolódást látunk: λ nő

Mivel magyarázható? Dobozba zárt részecske energiaszintjei közötti különbség csökken a doboz méretének növekedésével ($\Delta E_{n-n'} \sim \frac{n^2-n'^2}{L^2}$)

2. $n \rightarrow \pi^*$ – kromofór a magános elektronpár
3. $\sigma \rightarrow \sigma^*$, $n \rightarrow \sigma^*$, stb
4. töltésátmeneti („charge transfer”) gerjesztés
a gerjesztés a molekula egyik részében lokalizált pályáról egy másik részén lokalizált pályára történik $\rightarrow$ a molekula egyik felén parciális pozitív, a másikon parciális negatív töltés keletkezik, így a dipólusmomentum jelentősen megnő. Példa:



Az ilyen sávok intenzitás nagyon nagy, mert nagy a dipólusmomentum megváltozása!

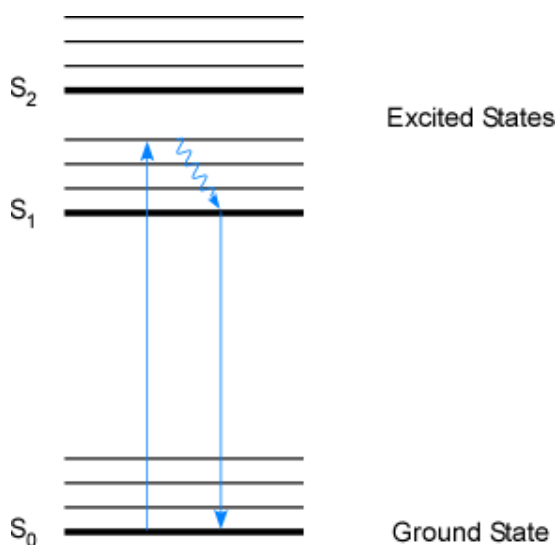
5. átmenetifémek komplexei
(l. a 4.9 fejezetet)

Gerjesztett állapotok megszűnése

A kvantummechanika szerint a gerjesztett állapot csak „kvázi-stacionárius”, azaz élet-tartama véges. Megszűnhet:

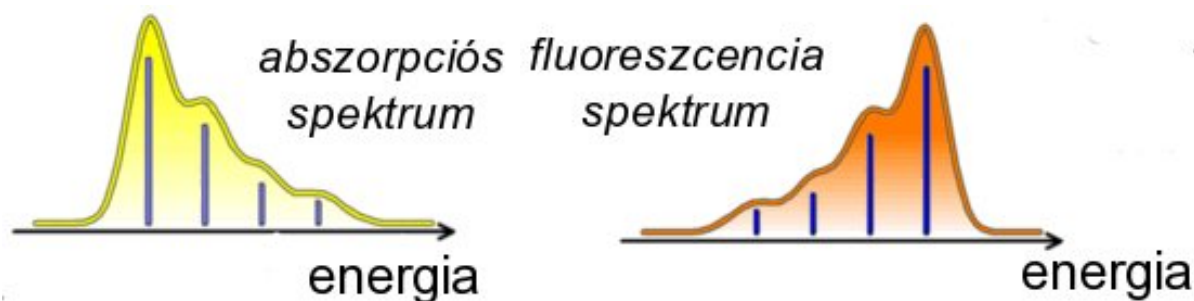
- sugárzás nélkül: bonyolult mechanizmussal egyéb szabadsági fokra kerül át az energia (főleg rezgésre, forgásra $\rightarrow$ minta felmelegszik)
- sugárzással
 - fluoreszcencia – azonnal (nanoszekundumos nagyságrend)
 - foszforeszcencia – időben késleltetve (szekundumos, sőt perces nagyságrend)

Fluoreszcencia



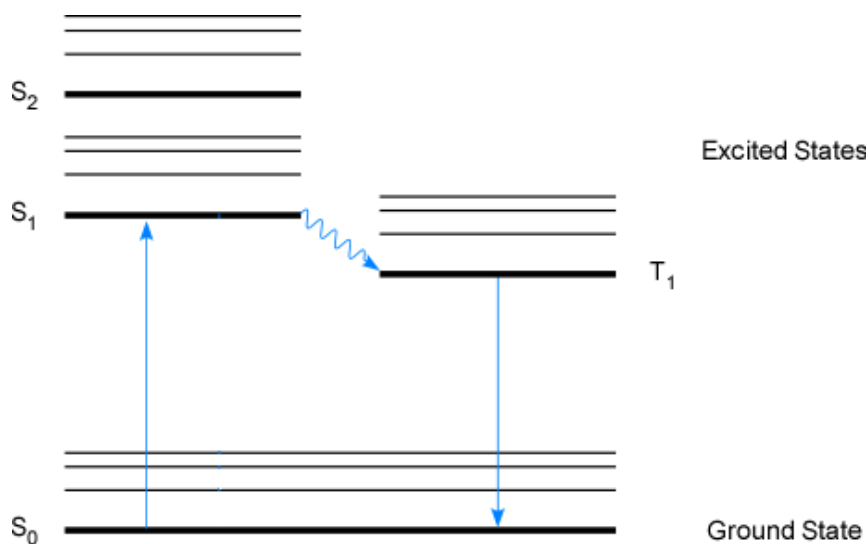
Az ábráról látható:

- $\lambda_{ki} \geq \lambda_{be}$
- a abszorpció a gerjesztett állapot rezgési szintjeit mutatja
- az emisszió az alapállapot rezgési szintjeit mutatja



Foszforeszcencia

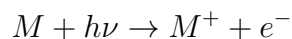
Mi a késés oka?



Mivel triplett $\rightarrow$ szinglett átmenet tiltott, így csak lassan (kis intenzitással) valósulhat meg. A hullámhossz eltérése itt nagyobb, mint a fluoreszcenciánál.

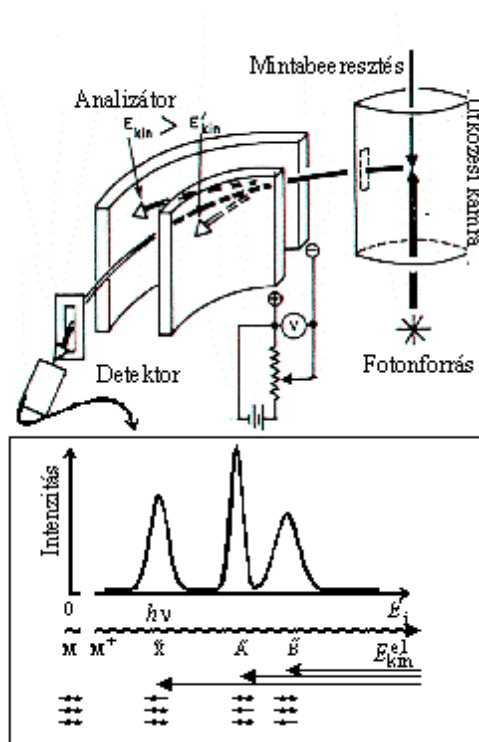
5.4.2. PES – fotoelektron-spektroszkópia és ESCA

Elv: elektromágneses sugárzás hatására ionizáció történik:



A kilépő elektronok kinetikus energiáját ($T_{elektron}$) mérjük, melyből a gerjesztő fény frekvenciájának (ν) ismeretében az ionizációs energia (IE) kiszámítható.

$$h\nu = \underbrace{E_{ion} - E_{molekula}}_{IE} + T_{elektron}$$



Gyakorlatban:

- UPS: *UV fény*, az elektronokat a vegyértékhéjről távolítja el → molekulára jellemző
- XPS: *röntgen fény* atomtörzsből távolítja el az elektront → molekulát alkotó atomokra lesz jellemző.

UV Fotoelektron-spektroszkópia (UPS)

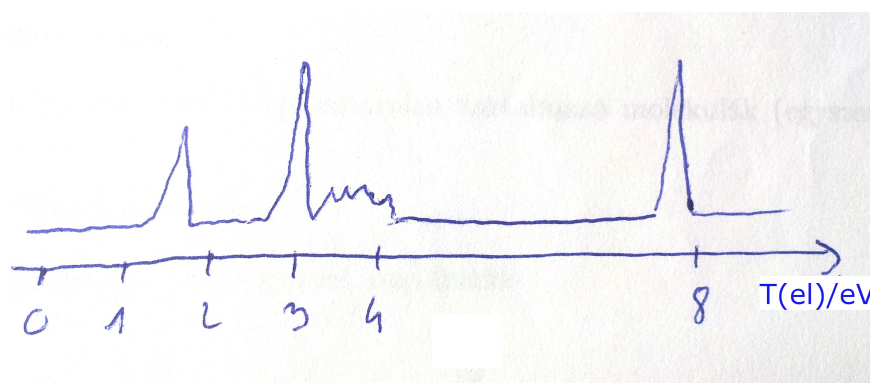
Forrás: tradicionálisan: He lámpa ún. I és II vonala ($\sim 20\text{-}21\text{ eV}$)

Mitől függ az $E_{ion} - E_{molekula}$ energiakülönbség? A molekula és az ion állapotától.

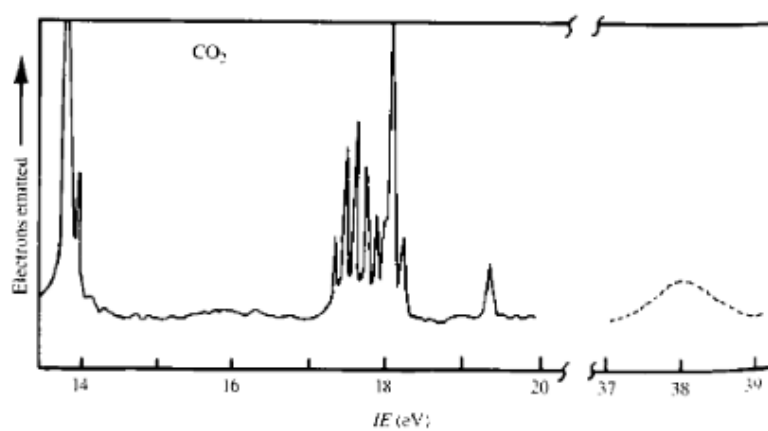
- a molekula általában alapállapotban (elektronos ill. rezgési) van
- az ion különböző állapotai (alap- és gerjesztett) keletkezhetnek → több sáv a spektrumban
- a különböző ionállapotok különböző rezgési szintjeit is elérhetjük → rezgési finomszerkezet (mint UV esetén is)

Példa: CO_2 molekula fotoelektron-spektruma

Az elektron kinetikus energiája szerint:



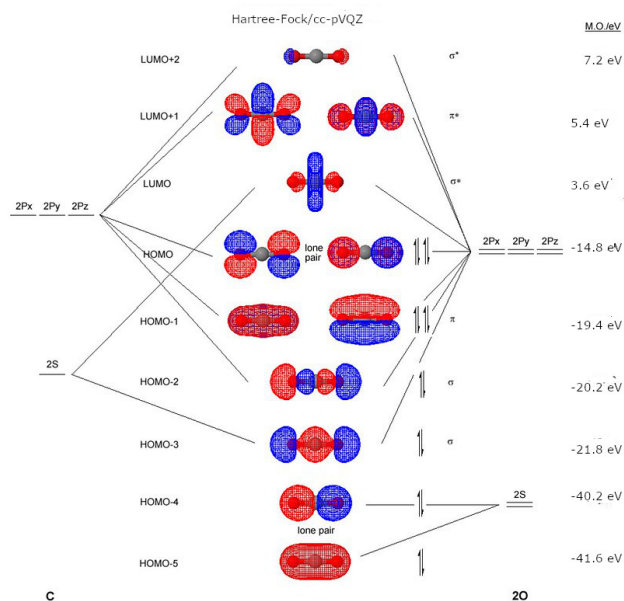
Az ionizációs energia szerint:



Látható:

- három sávnak nincs vibronikus szerkezete – ezek olyan ionizációból származnak, ahol nem változik lényegesen a kötэшossz (pl. nemkötő pályáról);
- egy sáv jelentős vibronikus szerkezettel rendelkezik – lényeges változás a geometriában, ionizáció kötő pályáról.

A CO₂ molekula pályái és pályae energiái:



Magyarázat hasonló, mint UV spektroszkópiánál: a molekula és az ion rezgési hullám-függvényének átfedése határozza meg az egyes rezgési komponensek intenzitását. Nemkötő elektron eltávolításakor a kötésviszonyok nem változnak, főleg a 0-0 átmenet fogjuk látni, míg kötő elektron eltávolításával sokat változik a potenciálfelület és vele együtt a rezgési hullámfüggvény.

Jelen esetben azt látjuk, hogy a HOMO-2 és a HOMO-3 ionizációja esetén sem változik a kötéshossz. Ezek nem tisztán kötő pályák, lazító komponenseik is vannak.

A fotoelektron spektrumból nyerhető információ tehát:

- ionizációs energia
- ion rezgési állapotai

Alkalmazás főleg nemkötő elektronpárokat tartalmazó molekulák (egyszerűbb a spektrum):

- átmenetifém-komplexek
- heterociklusos (aromás) szerves vegyületek

Röntgen fotoelektron-spektroszkópia (XPS)

Röntgensugarakkal az atomok belső pályái is ionizálhatók, pl. törzselektronok → a spektrum a molekulát felépítő atomokra lesz jellemző.

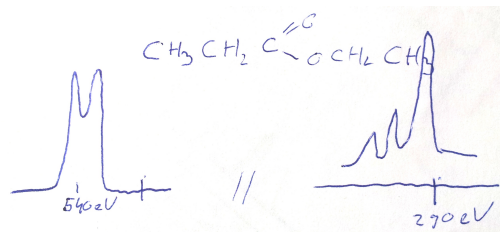
XPS egy gyakorlati alkalmazása: *ESCA – Electronspectroscopy for chemical analysis*

Belső héjak:

- jó közelítéssel azonosak az atompályákkal (l. pl. víz $1a_1$ pályája) → az ionizációs energia jellemző lesz az atomra

- kismértékű függés a kémiai környezettől → a különböző környezetben lévő atomok ionizációs energiája kismértékben változik: „kémiai eltolódás”

Példa: etilpropionát ESCA spektruma:



Megjegyzés a spektrumhoz:

- az O és C atomok jele jelentősen eltérő helyen (540 ill. 290 eV-nál) jelentkezik
- az O atom jele két sávra bomlik: két eltérő környezetű O atom
- az C atom jele három sávra bomlik: három eltérő környezetű C atom

5.5. Mágneses rezonancia spektroszkópiai módszerek (NMR, ESR)

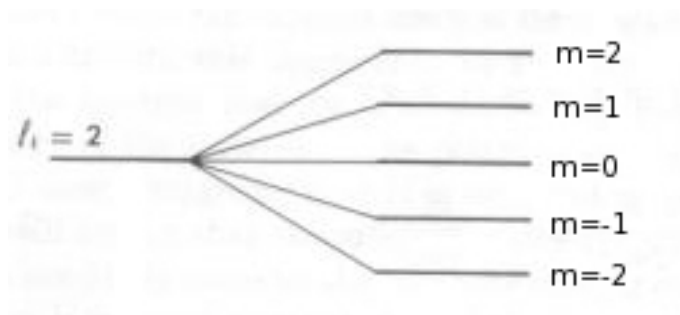
Emlékeztető: Keringő töltés mágneses teret kelt, amely kölcsönhat a külső mágneses térrel.

A H-atom elektronja esetén a forgás mértékére az l kvantumszám, a forgás irányára az m kvantumszám jellemző. Azt találtuk, hogy az energiaszintek m szerinti degeneráltsága mágneses térben megszűnik, mert a rendszer szimmetriája csökken, H-atom és mágneses tér együtt már nem gömbszimmetrikus. Ez az ún. *Zeeman-effektus*.

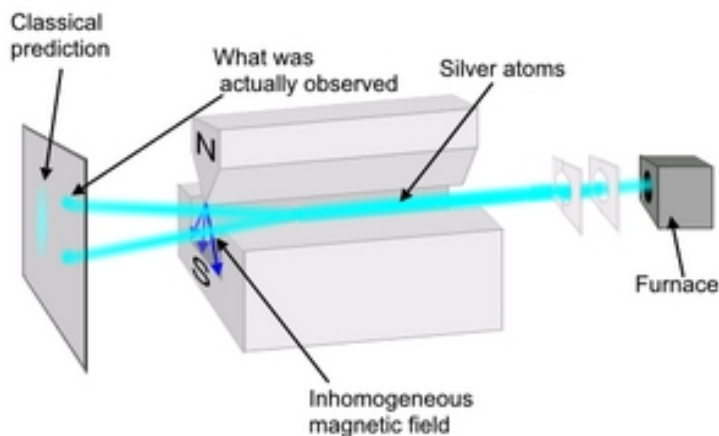
Például, a $2p_1, 2p_0, 2p_{-1}$ pályák energiája felhasad, három különböző értéket mutat. Sematikusan:



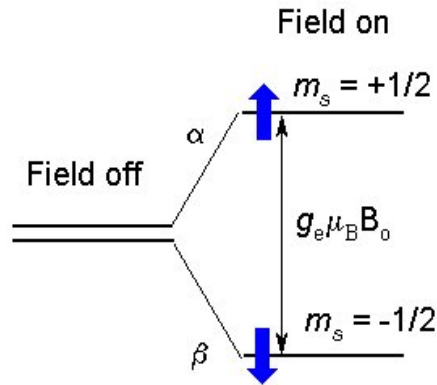
De a $3d_2, 3d_1, 3d_0, 3d_{-1}, 3d_{-2}$ pályák energiája is felhasad, öt különböző értéket mutat. Sematikusan:



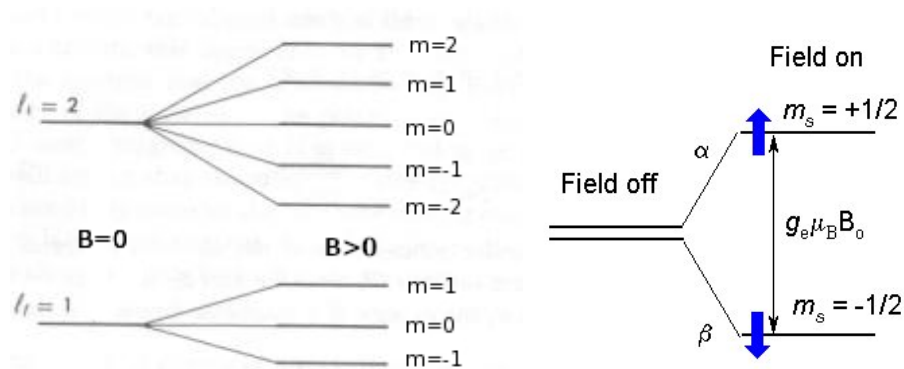
Másik példát is láttunk a mágneses tér és az atom/molekula kölcsönhatására. A *Stern-Gerlach kísérletben* (1. ábra alább) a nyaláb nem 1, 3, 5, 7, stb. komponensre bomlott, mint azt a Zeeman-effektus alapján várnánk, hanem csak kettőre.



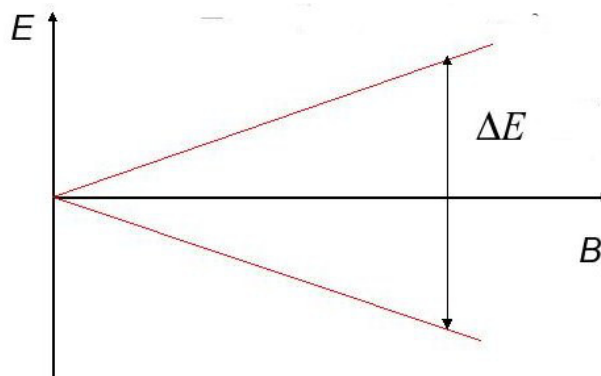
Ezt az elektron spinjével magyaráztuk, amelynek két állapota van (α és β), melyek degeneráltsága szintén megszűnik mágneses térben:



Összefoglalva, bizonyos degenerált energiaszintek tehát mágneses térben felhasadnak.



Természetesen az effektus bármekkora tér esetén megfigyelhető, így a mágneses teret folyamatosan változtatva a felhasadás mértéke változtatható. Például a két szintes rendszer esetén:



5.5.1. Elektronspin rezonancia spektroszkópia (ESR)

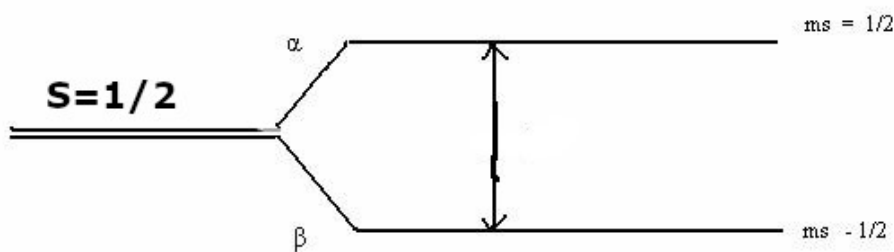
Nyílt héjú molekulák esetén $S > 0$, az ilyenkor fellépő $2S + 1$ degenerált energiaszint külső mágneses tér hatására felhasad, **energiakülönbség jön létre**. Ezen energiszintek között foton elnyeléssel **átmenet** valósítható meg:

$$\Delta E(B) = h\nu$$

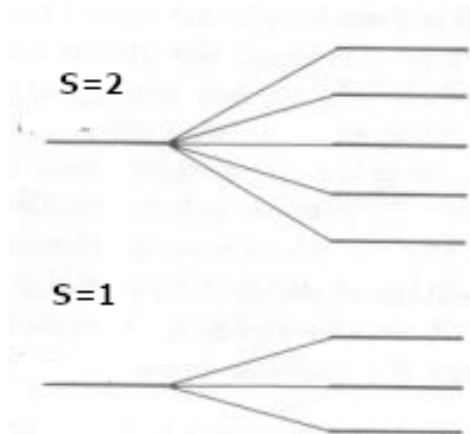
Ezen alapul **ESR (Electron Spin Resonance) spektroszkópia**, amellyel tehát nyílt héjú molekulákat (gyököket) vizsgálhatunk mágneses térben.

Megvalósítható mágneses terek esetén a ν frekvencia a *mikrohullámú* tartományába esik.

$S = \frac{1}{2}$ esetén az elektronhoz hasonlóan két energiaszint van:



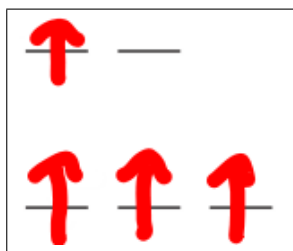
Az alábbi ábra más spineseteket mutat:



A mágneses tér hatására létrejött energiaszintek száma tehát $2S + 1$.

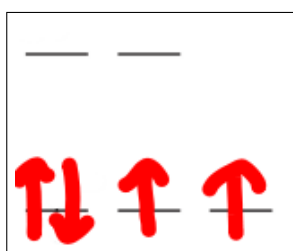
Milyen molekuláknak van tehát ESR spektruma? Melyekben $S \neq 0$, tehát nyílt héjú molekulák, azaz gyökök. Erre láttunk példát a átmentifém-komplexek esetén.

Gyenge kristálytér esetén az elektronok maximális spinnel töltik be a rendelkezésre álló energiaszinteket,



így négy elektron esetén $S = 2$. Mágneses térben ez öt energiaszintet eredményez.

Erős kristálytér esetén az elektronok az alacsonyabb energiájú pályákat töltik be először,



így négy elektron esetén $S = 1$. Mágneses térben ez három energiaszintet eredményez.

Ebből következik, hogy a kis és nagy spinszámú eset megkülönböztethető ESR spektroszkópiával.

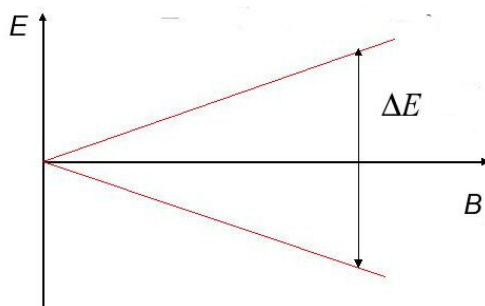
5.5.2. Magmágneses rezonancia spektroszkópia (NMR)

Történet: Bloch és munkatársai (Stanford), valamint Purcell és munkatársai (Harvard) 1946-ban egymástól függetlenül publikálták a jelenséget, majd 1952 közös Nobel-díjat kaptak.

Bizonyos magoknak van nullától különböző spinje (melyet itt I -vel szokás jelölni):

mag	^1H	^2H	^{13}C	^{14}N	^{19}F	^{29}Si	^{31}P
$I =$	$1/2$	1	$1/2$	1	1	$1/2$	$1/2$
szintek száma ($2I+1$)	2	3	2	3	3	2	2

Legegyszerűbb, egyben a leggyakrabban használt eset: $I=1/2$, azaz pontosan megegyezik az elektron esetén találttal: mágneses térben a két degenerált energiaszint felhasad:



Az energiakülönbség függ a külső mágneses tér nagyságától, amit precízen *mágneses indukciónak* nevezünk (B). Így az energia különbsége a két állapot között:

$$\Delta E = B \cdot \gamma'$$

ahol γ' egy, a rendszerre jellemző konstans.

A rendszer tehát ΔE -nek megfelelő frekvenciájú fotont tud elnyelni:

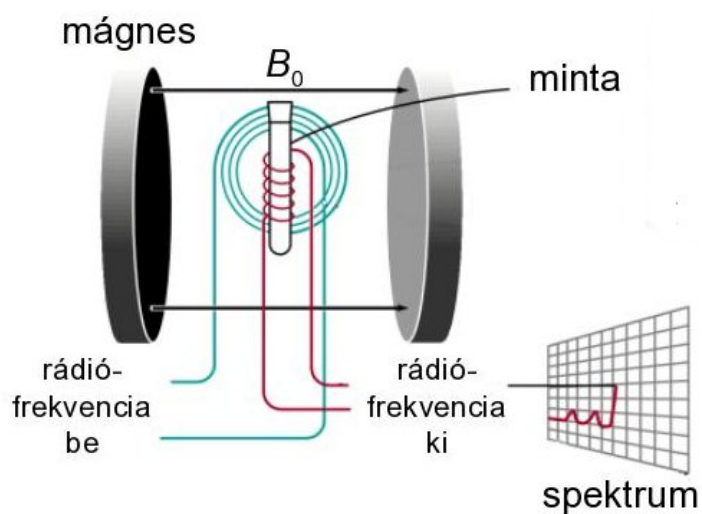
$$\begin{aligned} \Delta E &= B \cdot \gamma' = h\nu \\ \nu &= \frac{\Delta E}{h} = B \cdot \frac{\gamma'}{h} \equiv B \cdot \gamma \end{aligned}$$

ahol $\gamma = \frac{\gamma'}{h}$

Vegyük észre, hogy a frekvencia függ a mágneses indukció (B) nagyságától is. Azaz: az átmenet két paraméter változtatásával érhető el, változtathatjuk az elektromágneses tér frekvenciáját és az indukciót tartjuk konstans értéken, illetve konstans mágneses tér mellett a frekvenciát változtatjuk. Megvalósítható mágneses terek esetén a ν frekvencia a *rádióhullámok* tartományába esik.

A készülékeket a mágnes térereje helyett a rádióhullám frekvenciatartományának megadásával jellemezzük (pl. 500 MHz, amely 11.7 Tesla térnek felel meg).

A mérés elrendezését az alábbi ábra mutatja:



Cél: Minél nagyobb legyen a mágneses tér, hogy mérhető legyen az energiakülönbség. Az első kommerciális készülékek 60 Mhz körül dolgoztak, a mai legmodernebb készülékek már az 1 GHz-et is túllépik.

Ezen az ábrán pedig az épületben lévő 500 MHz-es (a használt rádióhullám frekvenciája) készüléket látjuk:

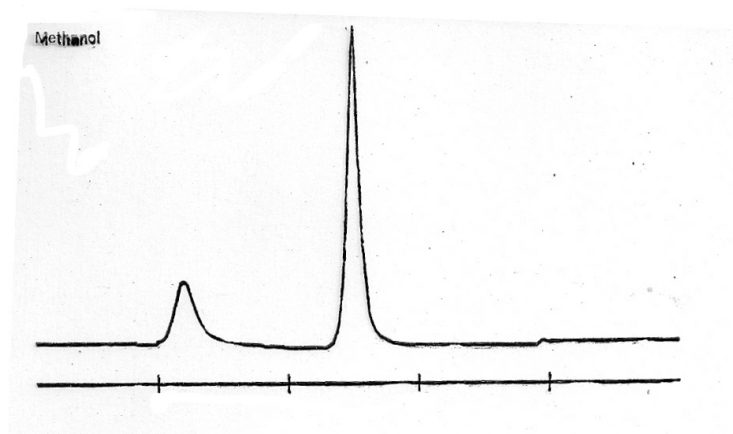


5.5.3. Az NMR spektrum kvalitatív leírása: a kémiai eltolódás

Tekintsük a legegyszerűbb magot, a ^1H -t (proton NMR).

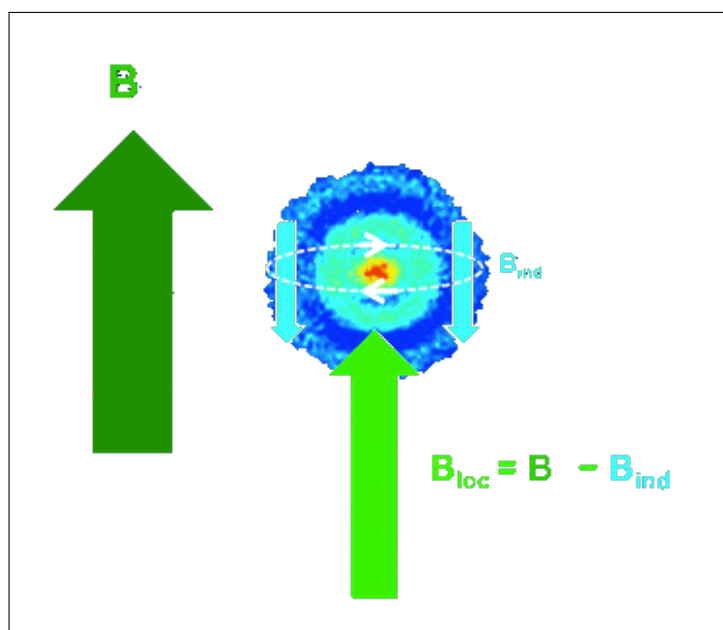
Hány átmenetet tapasztalunk az etilalkohol ($\text{CH}_3\text{-OH}$) molekula esetén?

Az eddig elmondottak alapján egyet, hiszen egy adott mag esetén az energiakülönbség, és így az elnyelt fény frekvenciája az anyagi minőségtől (itt proton) valamint a mágneses tér erősségétől függ csak.



A spektrum azonban két jelet mutat. Mi ennek oka?

A molekulában ugyanis nem csupasz magok vannak, ezeket elektronok veszik körül. Az elektronok pályájukon „keringve” maguk is mágneses teret keltenek, tehát egy adott protonnál észlelhető mágneses tér a külső mágneses téren kívül függni fog a mag környezetétől is.



From mriquestions.com

Tehát a magnál mérhető mágneses indukció eltér a külső mágneses tértől, és ezt az eltérést a proton körüli elektronfelhő („kémiai környezet”) határozza meg. Képletekkel:

$$B_{locA} = B \cdot (1 - \sigma_A)$$

ahol B a külső tér, B_{locA} az A magnál lévő tér és σ_A az árnyékolási tényező. Mivel ez utóbbi a molekula különböző környezetben lévő atomjaira különböző, ezeknél más és más tér lesz érzékelhető, tehát rezonancia különböző frekvenciánál jelentkezik.

$$\nu_A = B_{locA} \cdot \gamma = B \cdot (1 - \sigma_A) \cdot \gamma$$

Tehát metilalkohol kétféle protonjánál eltérő az eredő mágneses tér, így a jel más frekvenciánál jelenik meg.

Probléma: különböző készülékeken más és más a mágneses indukció nagysága („más a mágnes”), ezért más frekvenciáknál jelenik meg a jel, a spektrumok nem összehasonlíthatók.

Tekintsünk egy referencia rendszert:

$$\nu_{Ref} = B_{locRef} \cdot \gamma = B \cdot (1 - \sigma_{Ref}) \cdot \gamma$$

A következő mennyiség már független lesz a műszer által használt B -től:

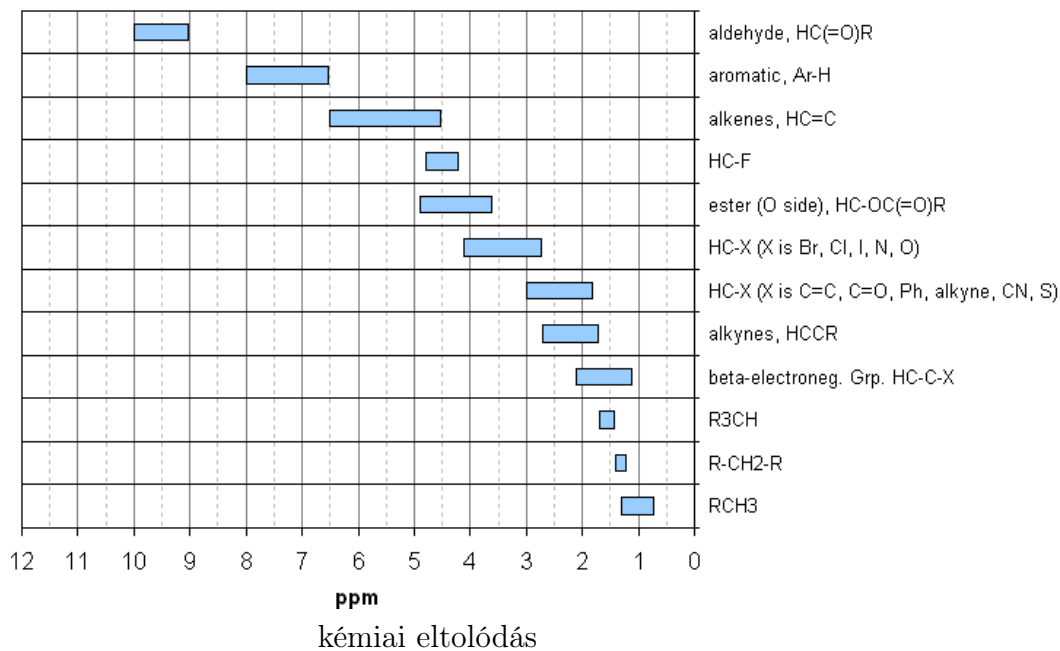
$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{\nu_A - \nu_{Ref}}{\nu_{Ref}} = \frac{(B \cdot (1 - \sigma_A) \cdot \gamma) - B \cdot (1 - \sigma_{Ref}) \cdot \gamma}{B \cdot (1 - \sigma_{Ref}) \cdot \gamma} \\ &= \frac{\sigma_{Ref} - \sigma_A}{1 - \sigma_{Ref}} \approx \sigma_{Ref} - \sigma_A \end{aligned}$$

δ_A az A magra vonatkozó *kémiai eltolódás* dimenziótlan mennyiség, ppm-ben (part per million) mérjük.

Referenciaként a TMS (tetrametilszilán) használatos. Így a különböző laboratóriumokban mért spektrumok összehasonlíthatók! (Azért TMS, mert sok egyforma proton van benne.) Az így definiált kémiai eltolódást tekintve:

- különböző molekulák protonjai különböző helyen jelennek meg;
- adott molekula különböző környezetben lévő protonjai más és más helyen jelennek meg.

Jellemző kémiai eltolódások:

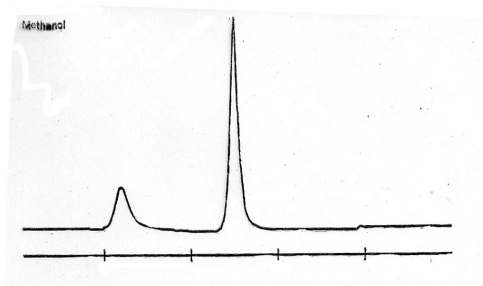


Kvalitatív észrevételek:

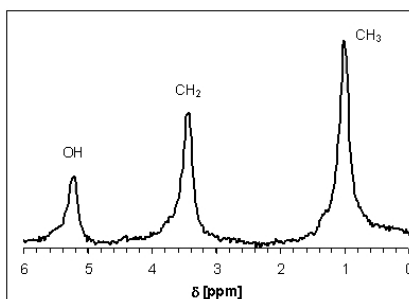
- a molekulán belüli eltérés az egyik legfontosabb az alkalmazás szempontjából, mert ez alapján megadható, hogy hány féle proton van a molekulában, sőt az intenzitások alapján ezek relatív száma is kiderül;
- bár a különböző molekulák elektronszerkezete különböző, az azonos csoportok környezete hasonló, ezek jele ugyanott jelenik meg;
- nagy elektronegativitású szomszédos atom elszívja az elektront $\rightarrow$ a proton „csupaszabb” lesz (nagyobb eltolódás);
- aromás gyűrű: általában erősebb (pozitívabb) eltolódás. Ennek a π rendszerben fellépő köráramokat szokás okként megadni.

Példák:

Metanol:

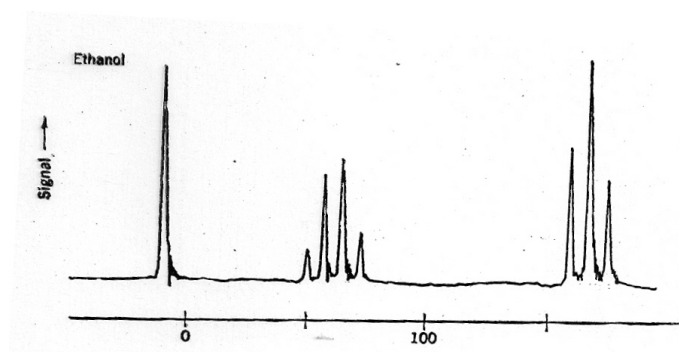


$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-OH}$ (etilalkohol):



5.5.4. A spin-spin csatolás

Finomszerkezet, pl. etanol nagyobb felbontásban:



(Hogy az OH sáv miért nem bomlik fel, azt majd később)
 Magyarázat: spin-spin csatolás.

- Láttuk, hogy a spin is mágneses tulajdonság, így az egyik spinrendszer által keltett mágneses tér hat a másakra. Így a szomszédos, de különböző kémiai eltolódású magok között csatolás lép fel.
- Nagysága attól függ, hogy a **szomszédos** ekvivalens magoknak mennyi az eredő spinje, azaz $\sum_i I_z(i)$.

Például tekintsük a CH₂ csoportot! Itt két ekvivalens mag van, ezek együtt a következő állapotokat vehetik fel:

	$\sum I_z$	statisztikus súly
$\alpha\alpha$	1	1
$\alpha\beta$	0	2
$\beta\alpha$	0	
$\beta\beta$	-1	1

Azaz, a CH₂ csoport két protonja együtt három három spinállapotban fordulhat elő, 1,0,-1 értékkel, 1,2,1 valószínűséggel. Ezért a **szomszédos** csoportban lévő proton három különböző spinrendszerrel hathat kölcsön, melyek megvalósulásának valószínűsége 1:2:1. Így a megfelelő jel három sávra hasad, melyek intenzitása 1:2:1 arányú.

Tekintsük a CH₃ csoportot:

	$\sum I_z$	statisztikus súly
$\alpha\alpha\alpha$	3/2	1
$\alpha\alpha\beta$		
$\alpha\beta\alpha$	1/2	3
$\beta\alpha\alpha$		
$\alpha\beta\beta$		
$\beta\beta\alpha$	-1/2	3
$\beta\alpha\beta$		
$\beta\beta\beta$	-3/2	1

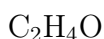
A CH₃ csoport hatására a szomszédos csoport sávja tehát négy sávra hasad, 1:3:3:1 arányban.

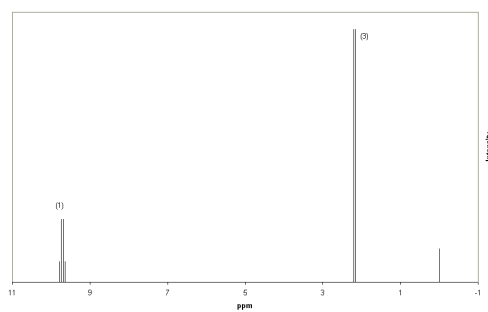
Ez magyarázza az etanol fenti spektrumát: CH₂ csoporthoz tartozó sáv négy sávra bomlik a szomszédos CH₃ csoport hatására; a CH₃ csoport sávja a szomszédos CH₂ csoport hatására három sávra hasad fel.

Az OH sáv azért nem bomlik fel, mert a hidrogénkötések révén a proton gyorsan cserélődik.

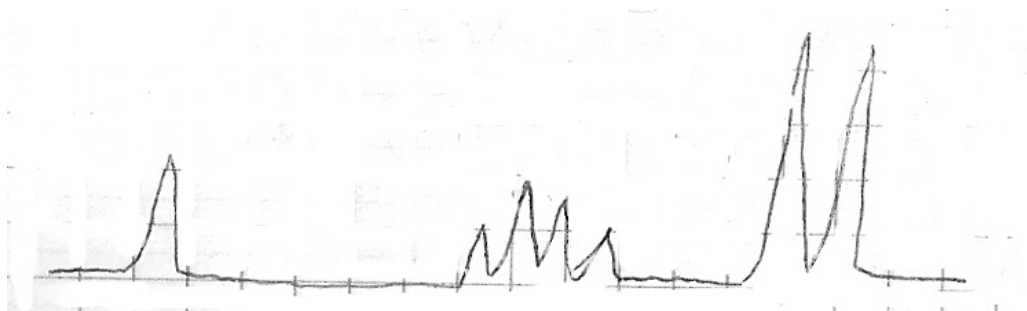
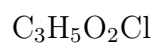
Mikor látjuk a felhasadást? Ha nagyobb a felbontás, azaz a különböző csoportok sávjai lehetőleg jobban eltávolodnak egymástól; ez akkor valósul meg, ha B elegendően nagy. Tehát: minél nagyobb a B , azaz minél nagyobb frekvenciával működik az NMR készülék, annál inkább lehet látni a spin-spin felhasadást. Vegyük azt is észre, hogy a spin-spin csatolás nagysága nem függ a külső tér nagyságától.

Példák:



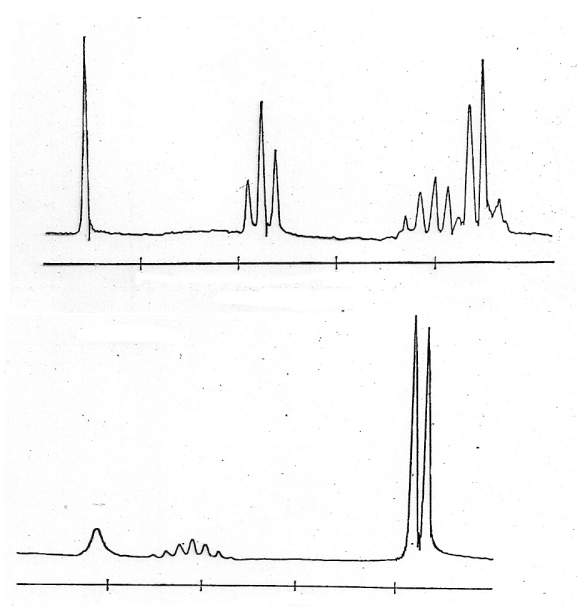


megoldás: acetaldehid



megoldás: $\text{CH}_3\text{-CHCl-COOH}$

n-propil-alkohol és izopropil-alkohol. Melyik melyik spektruma?



Az alsó az izopropil-alkohol spektruma, hiszen a nagy jel a CH_3 jele a középső szénen lévő proton két spinállapota miatt hasad két jelre, míg a CH protonja a szomszédos két CH_3 csoport miatt hét jelre hasad. Az OH jele itt sem hasad fel.

5.5.5. Gyakorlati NMR spektroszkópia

a) Szerkezeti képlet megállapítása

- hány féle proton (vagy C atom) van benne
- ezek relatív száma
- spin-spin csatolás alapján a csoportok relatív helyzete

b) Időfüggő tényező

Határozatlansági reláció alapján:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

ahol Δt a két szint kötött átmenet ideje (szint élettartama). Mivel az NMR-ben a legkisebb a gerjesztési energia, ezért itt a legnagyobb az idő. Ha a valamely folyamat (pl. protoncsere) ennél gyorsabban játszódik le, akkor a jel a folyamatra jellemző *átlag* lesz.

Okok:

- természetes
 - intermolekuláris (pl. protoncsere)
etanolban az OH proton szignálja nem hasad fel, mert H-kötésben gyors protoncsere (ha eléggé kiszárítjuk, felhasad)
 - intramolekuláris (pl. konformációváltozás, belső rotáció)
dimetil-amid esetén a parciális kettőskötés miatt a rotáció gátolt. A gát magassága megmérhető a spektrum hőmérsékletfüggéséből.
ciklohexán: az axiális és ekvatoriális protonok jele nem válik szét, mert gyors konformációváltozás, szobahőmérsékleten egyetlen éles sáv.
- mesterséges – telítjük a szintet, attól megszűnik a csatolás
(erre ^{13}C spektrum esetén van szükség, különben a protonokkal való csatolás borzalmasan bonyolult spektrumot adna. (^{13}C - ^{13}C csatolás nem lép fel, mert kicsi az előfordulása, így egy molekulában nagy valószínűséggel csak egy ilyen mag van.)